

به نام خدا

عناصر مدار

محمد جواد شریعت زاده

زمستان ۹۰

نبود یک منبع منسجم برای دانش آموزان علاقه مند به مکانیک مدارهای فضایی مشکلاتی را به وجود آورده است.
امید است این جزوه کوتاه به علاقه مندان این شاخه از علم مکانیک کمک نماید.

دستگاه مختصات perifocal

مرکز این دستگاه مختصات بر مرکز جرم جاذب قرار دارد، صفحه X-Y در این مختصات، صفحه مدار است و محور X از حقیض مداری می گذرد. محور Y نیز از نقطه ای که با راستای حقیض ۹۰ درجه فاصله دارد و در جهت حرکت جسم قرار دارد می گذرد یعنی $\theta=90^\circ$. در نتیجه محور Z عمود بر صفحه مداری و در جهت بردار تکانه زاویه ای قرار دارد. معمولاً بردار یکه در جهت محور X را p، بردار یکه در جهت محور Y را q و بردار یکه در جهت محور Z را w می نامند. باتوجه با اینکه بردار یکه w عمود بر صفحه مداری است، می توان نوشت:

$$\hat{w} = \frac{\mathbf{h}}{h}$$

که در آن بردار h بردار تکانه زاویه ای ویژه (تکانه زاویه ای بر واحد جرم) است. بردار مکان ماهواره در این دستگاه عبارتست از:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \bar{x}\hat{\mathbf{p}} + \bar{y}\hat{\mathbf{q}} \\ \bar{x} &= r \cos \theta \quad \bar{y} = r \sin \theta \\ \mathbf{r} &= \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta} (\cos \theta \hat{\mathbf{p}} + \sin \theta \hat{\mathbf{q}})\end{aligned}$$

همچنین برای بردار سرعت ماهواره می توان نوشت:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\bar{x}}\hat{\mathbf{p}} + \dot{\bar{y}}\hat{\mathbf{q}}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\bar{y}} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta\end{aligned}$$

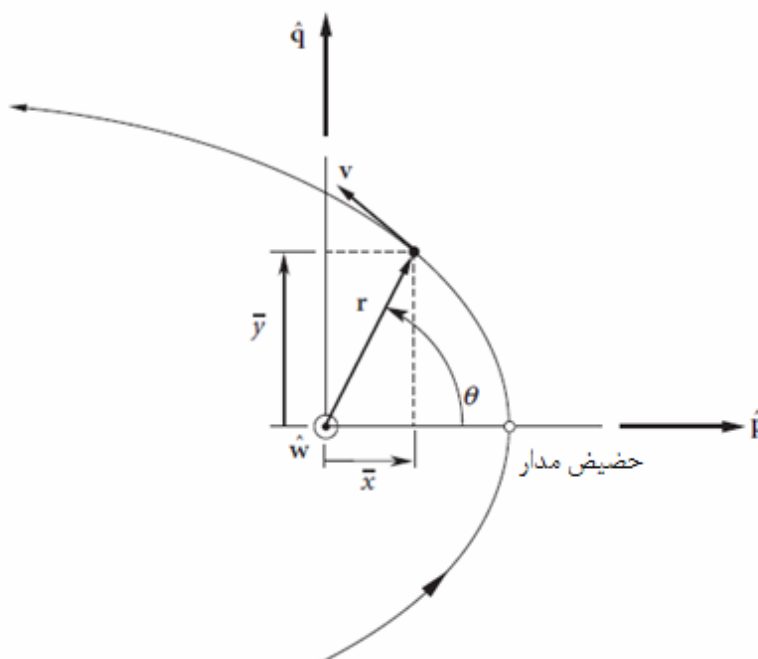
با مشتق گیری از رابطه $r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$ و جایگذاری $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$ ، نتایج زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{\mu}{h} e \sin \theta \\ r \dot{\theta} &= v_{\perp} = \frac{\mu}{h} (1 + e \cos \theta) \\ \mathbf{v} &= \frac{\mu}{h} [-\sin \theta \hat{\mathbf{p}} + (e + \cos \theta) \hat{\mathbf{q}}]\end{aligned}$$

برای اینکه یک مدار در دستگاه perifocal مشخص باشد به دو مولفه نیازمندیم، خروج از مرکز و تکانه زاویه ای (گاهی به جای تکانه زاویه ای از نیم قطر اطول نیز استفاده می شود). تمام مشخصات دیگر یک مدار نظیر انرژی، دوره تناوب و نیم قطر اطول را می توان با استفاده از این دو مولفه به دست آورد.

$$\begin{aligned}h &= \sqrt{GMa(1 - e^2)} \Rightarrow a = \frac{h^2}{GM(1 - e^2)} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad \text{و} \quad E = -\frac{GMm}{a}\end{aligned}$$

به یک پارامتر دیگر برای مشخص کردن مکان ماهواره در مدار نیز نیازمندیم که معمولاً از آنومالی واقعی (θ) و یا مدت زمان گذشته از حضیض استفاده می کنیم .



شکل ۱

دستگاه مختصات ECEF

برای مشخص کردن کامل یک مدار در فضا به یک دستگاه مختصات جامع تر نیازمندیم. بدین منظور از دستگاه مختصات لخت زمین مرکز - استوایی یا ECEF استفاده می کنیم.

مرکز این دستگاه مختصات مرکز زمین و محور X آن از نقطه اعتدال بهاری (نقطه اول حمل γ) می گذرد . صفحه X-Y منطبق بر استوای سماوی و محور Z از قطب شمال سماوی می گذرد . این دستگاه مختصات کاملاً لخت است زیرا برای تعریف آن از ستاره ها و ثوابت استفاده کرده ایم .

عناصر مداری

در ابتدا خط مشترک بین صفحه مداری (صفحه x-y دستگاه perifocal) و صفحه X-Y را می یابیم. این خط ، خط گره (node line) نام دارد و دو نقطه ای از مدار که بر روی این خط واقع هستند ، نقاط گره نام دارند . گره ای که ماهواره پس از عبور از آن به بالای استوا منتقل می شود را گره صعودی (ascending node) و گره ای که ماهواره پس از عبور از آن به پایین استوا منتقل می شود را گره نزولی (descending node) می نامند .

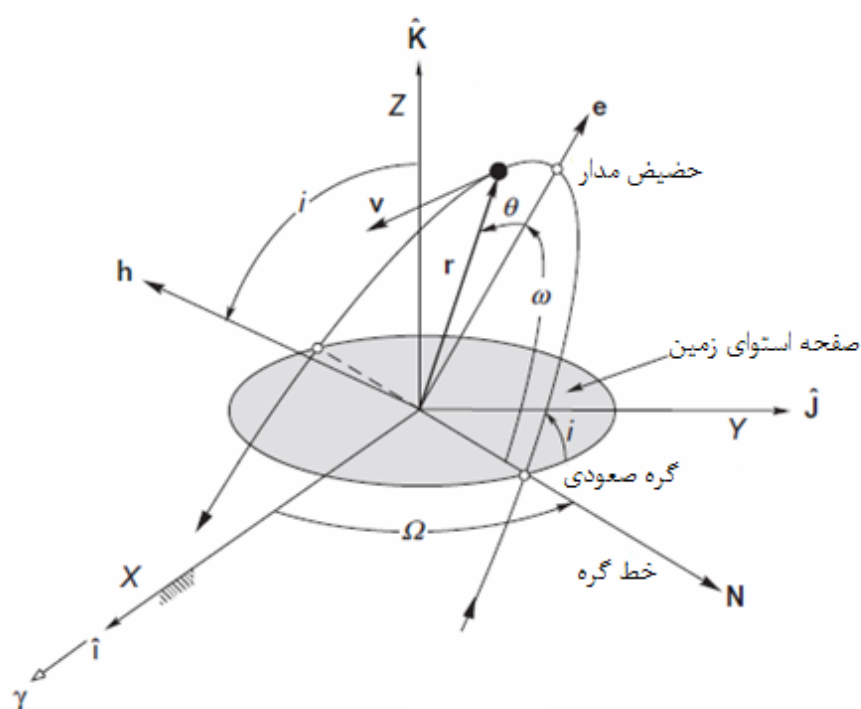
بردار گره صعودی را برداری تعریف می کنیم که ابتدای آن بر مرکز مختصات واقع شده و از گره صعودی می گذرد و آن را با N نشان می دهیم . زاویه ی بین جهت مثبت محور X و بردار N را به عنوان اولین پارامتر مداری با Ω نشان داده و طول گره صعودی می نامیم . این زاویه می تواند مقادیر بین 0° تا 360° را اتخاذ کند .

دومین پارامتر مداری را با i نشان داده و میل مداری (inclination) می نامیم ، که زاویه بین صفحه استوا و صفحه مداری می باشد . این زاویه طبق قانون دست راست به دست می آید ، به این گونه که در جهت پادساعتگرد از صفحه استوا تا صفحه

مداری اندازه گیری می شود. همچنین این زاویه برابر است با زاویه راستای عمود بر صفحه مداری یعنی راستای بردار تکانه زاویه ای تا محور Z . این زاویه می تواند مقادیر بین 0° تا 180° را داشته باشد.

برای مشخص کردن حضیض مدار از ω یا طول حضیض (argument of perigee) استفاده می کنیم. که زاویه بین بردار گرهِ صعودی و بردار خروج از مرکز است و روی صفحه مداری اندازه گیری می شود. این زاویه می تواند مقادیر بین 0° تا 360° را اتخاذ کند.

سه زاویه ذکر شده در بالا را زوایای اوپلر نیز می نامند که جهت گیری مدار در فضا را مشخص می کنند. با استفاده از تکانه زاویه ای و خروج از مرکز نیز نوع مدار مشخص می شود. مجموعه این پنج پارامتر را پارامترهای مداری می نامند. (شکل ۲)



شکل ۲

بدست آوردن پارامترهای مداری با استفاده از بردارهای حالت

حال می خواهیم با استفاده از بردار مکان $\mathbf{r}$ و بردار سرعت ماهواره $\mathbf{v}$ که در سیستم مختصات ECEF بیان شده اند، عناصر مداری آن را بدست آوریم. در زیر مراحل این عملیات شرح داده شده است. (توجه داشته باشید حروفی که به صورت تو پر نوشته شده اند نشان دهنده بردارها می باشند).

۱- محاسبه فاصله جسم از مرکز زمین :

$$r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

۲- محاسبه اندازه سرعت ماهواره :

$$v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2}$$

۳- محاسبه سرعت شعاعی :

$$v_r = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} / r = (Xv_X + Yv_Y + Zv_Z) / r.$$

توجه داشته باشید که اگر سرعت شعاعی مثبت باشد، یعنی باعث افزایش فاصله مداری (r) می شود. پس ماهواره در حال حرکت به سمت اوج مدار ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) است. و اگر سرعت شعاعی منفی باشد، ماهواره در حال حرکت به سمت حضیض مدار ($180^\circ < \theta < 360^\circ$) است.

۴- محاسبه بردار تکانه زاویه ای ویژه (تکانه زاویه ای بر واحد جرم) :

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ X & Y & Z \\ v_X & v_Y & v_Z \end{vmatrix}.$$

۵- محاسبه اندازه تکانه زاویه ای ویژه (اولین پارامتر مداری) :

$$h = \sqrt{\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}}$$

۶- محاسبه میل مداری (دومین پارامتر مداری):

$$i = \cos^{-1} \left(\frac{h_Z}{h} \right)$$

یادآوری می کنیم که این زاویه می تواند مقادیر بین 0° تا 180° را داشته باشد. اگر $90^\circ < i < 180^\circ$ باشد، جهت گردش ماهواره به دور زمین خلاف جهت گردش زمین به دور خودش است. در این حالت اصطلاحاً مدار را چپ گرد می گویند.

۷- محاسبه بردار گره صعودی :

$$\mathbf{N} = \hat{\mathbf{K}} \times \mathbf{h} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ h_X & h_Y & h_Z \end{vmatrix}$$

۸- محاسبه اندازه بردار گره صعودی :

$$N = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}}.$$

۹- محاسبه طول گره صعودی (سومین پارامتر مداری):

$$\Omega = \cos^{-1}(N_X/N)$$

اگر مولفه بردار N در راستای X مثبت باشد، آنگاه Ω در ربع اول و یا چهارم مثلثاتی قرار دارد (جایی که مقدار تابع $\cos$ مثبت است) و اگر مولفه بردار N در راستای X منفی باشد، آنگاه Ω در ربع دوم و یا سوم مثلثاتی قرار می گیرد (جایی که مقدار تابع $\cos$ منفی است). پس :

$$\Omega = \begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{N_X}{N}\right) & (N_Y \geq 0) \\ 360^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{N_X}{N}\right) & (N_Y < 0) \end{cases}$$

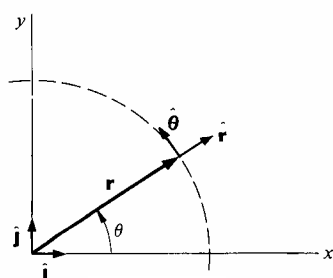
۱۰- محاسبه بردار خروج از مرکز :

برای محاسبه بردار خروج از مرکز از روش زیر استفاده می کنیم. توجه داشته باشید که به جای GM از μ استفاده می کنیم .

$$\mathbf{a} = -\frac{\mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{h} \times \vec{v}) = \vec{h} \times \vec{a} = (\vec{r} \times \vec{v}) \times \left(-\frac{\mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}}\right)$$

با توجه به شکل ۳ می توان روابط زیر را نوشت :



شکل ۳

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad , \quad \hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

$$\Rightarrow \hat{r} \times \hat{k} = \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{h} \times \vec{v}) = -GM \dot{\theta} \hat{\theta}$$

حال می نویسیم :

$$\frac{d}{dt}(\mu \hat{r}) = \mu \frac{d\hat{r}}{dt} = \mu \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{h} \times \vec{v} + \mu \hat{r}) = 0 \Rightarrow \vec{h} \times \vec{v} + \mu \hat{r} = cte = \vec{A}$$

دوطرف را در $\vec{r}$ ضرب داخلی می کنیم

$$\vec{r} \cdot (\vec{h} \times \vec{v}) + \mu r = Ar \cos \alpha \Rightarrow -h^2 + \mu r = Ar \cos \alpha$$

که در آن α زاویه ی بین بردار A و بردار r است .

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 - \frac{A}{\mu} \cos \alpha} \quad \Rightarrow \quad \vec{e} = \frac{\vec{A}}{-\mu} = \frac{1}{\mu} \left[\vec{v} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right]$$

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} \left[\vec{v} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{1}{\mu} \left[\vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{1}{\mu} \left[\overbrace{rv^2 - \vec{v}(\vec{r} \cdot \vec{v})}^{bac-cab \text{ rule}} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right]$$

$$\vec{e} = \frac{1}{\mu} \left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \vec{r} - rv_r \vec{v} \right]$$

۱۱- به دست آوردن اندازه خروج از مرکز :

$$e = \sqrt{\vec{e} \cdot \vec{e}}$$

۱۲- محاسبه طول حضیض :

$$\omega = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{N} \cdot \vec{e}}{N} \right)$$

اگر مولفه بردار e در راستای Z مثبت باشد، آنگاه ω در ربع اول و یا چهارم مثلثاتی قرار دارد (جایی که مقدار تابع $\cos$ مثبت است) و اگر مولفه بردار e در راستای Z منفی باشد، آنگاه ω در ربع دوم و یا سوم مثلثاتی قرار می گیرد (جایی که مقدار تابع $\cos$ منفی است). پس

$$\omega = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}}{Ne} \right) & (e_z \geq 0) \\ 360^\circ - \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}}{Ne} \right) & (e_z < 0) \end{cases}$$

۱۳- محاسبه آنومالی واقعی :

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{e r} \right)$$

همان طور که در قسمت ۳ بیان شد اگر سرعت شعاعی مثبت باشد ، آنومالی واقعی در ربع اول یا دوم مثلثاتی است و اگر سرعت شعاعی منفی باشد ، آنومالی واقعی در ربع سوم یا چهارم مثلثاتی است . پس

$$\theta = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{e r} \right) & (v_r \geq 0) \\ 360^\circ - \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{e r} \right) & (v_r < 0) \end{cases}$$

مثال ۱) اگر بردار مکان و سرعت یک ماهواره به ترتیب زیر باشد ، عناصرمداری را بدست آورید .

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= -6045\hat{\mathbf{i}} - 3490\hat{\mathbf{j}} + 2500\hat{\mathbf{k}} \text{ (km)} \\ \mathbf{v} &= -3.457\hat{\mathbf{i}} + 6.618\hat{\mathbf{j}} + 2.533\hat{\mathbf{k}} \text{ (km/s)} \end{aligned}$$

پاسخ (مراحل ذکر شده در قسمت قبل را به ترتیب انجام می دهیم :

$$r = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{(-6045)^2 + (-3490)^2 + 2500^2} = 7414 \text{ km}$$

$$v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(-3.457)^2 + 6.618^2 + 2.533^2} = 7.884 \text{ km/s}$$

$$v_r = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r} = \frac{(-3.457) \cdot (-6045) + 6.618 \cdot (-3490) + 2.533 \cdot 2500}{7414} = 0.5575 \text{ km/s}$$

سرعت شعاعی مثبت است. پس ماهواره از حضيض مدار عبور کرده و به سمت اوج در حرکت است.

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -6045 & -3490 & 2500 \\ -3.457 & 6.618 & 2.533 \end{vmatrix} = -25,380\hat{\mathbf{i}} + 6670\hat{\mathbf{j}} - 52,070\hat{\mathbf{k}} \text{ (km}^2\text{/s)}$$

$$h = \sqrt{\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}} = \sqrt{(-25,380)^2 + 6670^2 + (-52,070)^2} = \boxed{58,310 \text{ km}^2/\text{s}}$$

$$i = \cos^{-1} \frac{h_z}{h} = \cos^{-1} \left(\frac{-52,070}{58,310} \right) = \boxed{153.2^\circ}$$

میل مداری از ۹۰ درجه بیشتر است ، پس مدار چپ گرد است.

$$\mathbf{N} = \hat{\mathbf{K}} \times \mathbf{h} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{I}} & \hat{\mathbf{J}} & \hat{\mathbf{K}} \\ 0 & 0 & 1 \\ -25,380 & 6670 & -52,070 \end{vmatrix} = -6670\hat{\mathbf{I}} - 25,380\hat{\mathbf{J}} \quad (\text{km}^2/\text{s})$$

$$N = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}} = \sqrt{(-6670)^2 + (-25,380)^2} = 26,250 \text{ km}^2/\text{s}$$

$$\Omega = \cos^{-1} \frac{N_x}{N} = \cos^{-1} \left(\frac{-6670}{26,250} \right) = 104.7^\circ \text{ or } 255.3^\circ$$

چون مولفه بردار N در راستای Y منفی است ، پس اندازه طول گره صعودی باید مقداری در ربع سوم مثلثاتی باشد ، پس

$$\boxed{\Omega = 255.3^\circ}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{\mu} \left[\left(v^2 - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{r} - r v_r \mathbf{v} \right] \\ &= \frac{1}{398,600} \left[\left(7.884^2 - \frac{398,600}{7414} \right) (-6045\hat{\mathbf{I}} - 3490\hat{\mathbf{J}} + 2500\hat{\mathbf{K}}) - (7414)(0.5575) \right. \\ &\quad \left. (-3.457\hat{\mathbf{I}} + 6.618\hat{\mathbf{J}} + 2.533\hat{\mathbf{K}}) \right] \\ \mathbf{e} &= -0.09160\hat{\mathbf{I}} - 0.1422\hat{\mathbf{J}} + 0.02644\hat{\mathbf{K}} \end{aligned}$$

$$e = \sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}} = \sqrt{(-0.09160)^2 + (-0.1422)^2 + (0.02644)^2} = \boxed{0.1712}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \cos^{-1} \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}}{Ne} = \cos^{-1} \left[\frac{(-6670)(-0.09160) + (-25,380)(-0.1422) + (0)(0.02644)}{(26,250)(0.1712)} \right] \\ &= 20.07^\circ \text{ or } 339.9^\circ \end{aligned}$$

چون مولفه بردار خروج از مرکز در راستای Z مثبت است پس طول گره صعودی باید زاویه ای در ربع اول مثلثاتی باشد . پس

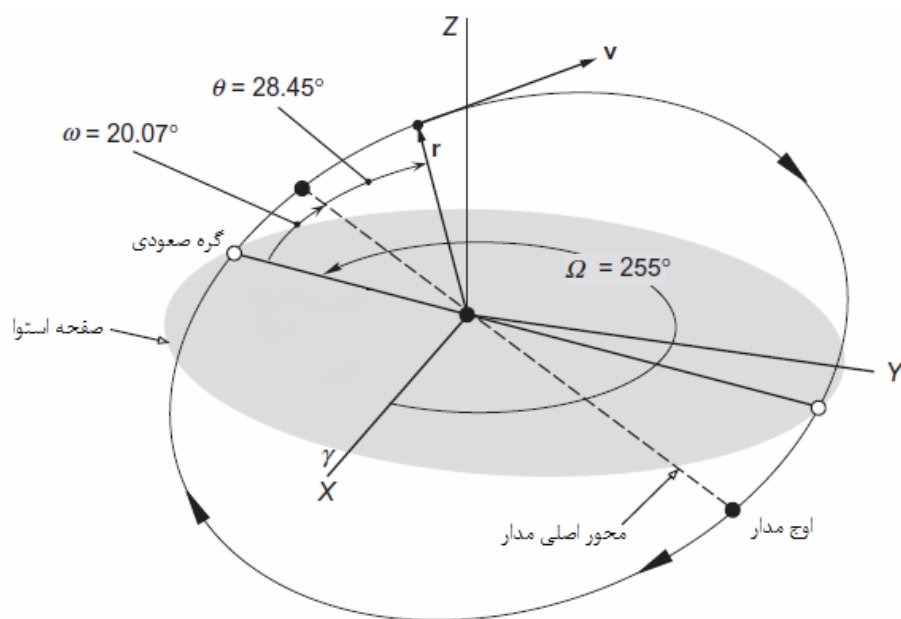
$$\boxed{\omega = 20.07^\circ}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}}{er} \right) = \cos^{-1} \left[\frac{(-0.09160)(-6045) + (-0.1422) \cdot (-3490) + (0.02644)(2500)}{(0.1712)(7414)} \right]$$

$$= 28.45^\circ \text{ or } 331.6^\circ$$

چون سرعت شعاعی مثبت است ، مقدار آنومالی واقعی باید در ربع اول مثلثاتی باشد .

$$\theta = 28.45^\circ$$



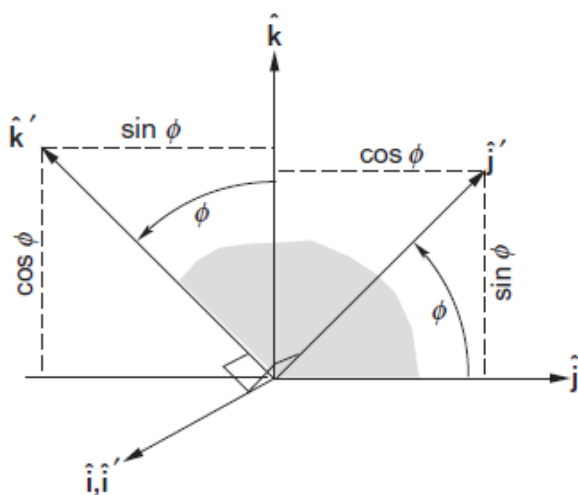
شکل ۴

مروری بر تبدیل دستگاه ها

در این قسمت می خواهیم روش انتقال از یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگر را بررسی کنیم .

در ابتدا حالت خاصی را در نظر می گیریم که در آن دستگاه مختصات حول یکی از محور ها دوران کرده است . اگر این دوران حول محور x باشد ، آنگاه با توجه به شکل ۵ می توان نوشت :

$$\begin{aligned}\hat{i}' &= \hat{i} \\ \hat{j}' &= (\hat{j}' \cdot \hat{i})\hat{i} + (\hat{j}' \cdot \hat{j})\hat{j} + (\hat{j}' \cdot \hat{k})\hat{k} = \cos\phi\hat{j} + \cos(90 - \phi)\hat{k} = \cos\phi\hat{j} + \sin(\phi)\hat{k} \\ \hat{k}' &= (\hat{k}' \cdot \hat{j})\hat{j} + (\hat{k}' \cdot \hat{k})\hat{k} = \cos(90^\circ + \phi)\hat{j} + \cos\phi\hat{k} = -\sin\phi\hat{j} + \cos\phi\hat{k}\end{aligned}$$



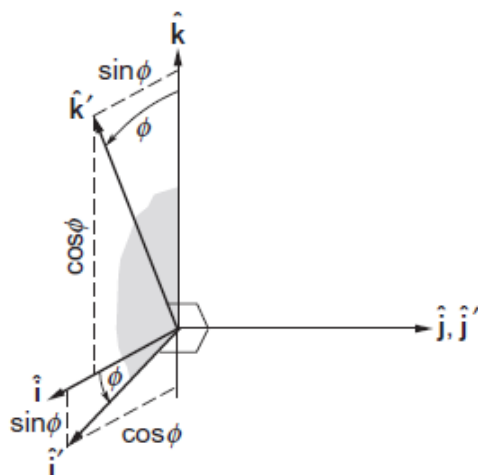
شکل ۵

$$\begin{bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix}$$

اگر چرخش حول محور y انجام شود (شکل ۶)، آنگاه داریم :

$$\begin{aligned}\hat{i}' &= (\hat{i}' \cdot \hat{i})\hat{i} + (\hat{i}' \cdot \hat{k})\hat{k} = \cos\phi\hat{i} + \cos(\phi + 90^\circ)\hat{k} = \cos\phi\hat{i} - \sin\phi\hat{k} \\ \hat{j}' &= \hat{j} \\ \hat{k}' &= (\hat{k}' \cdot \hat{i})\hat{i} + (\hat{k}' \cdot \hat{k})\hat{k} = \cos(90^\circ - \phi)\hat{i} + \cos\phi\hat{k} = \sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix}$$

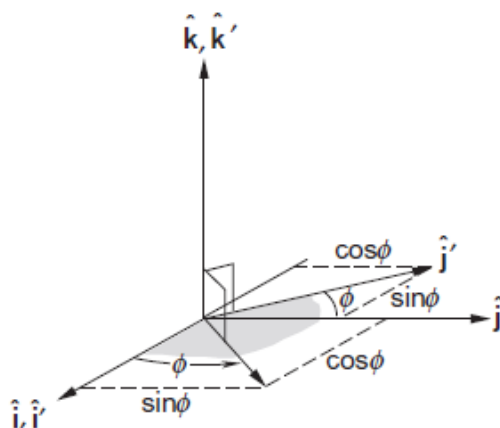


شکل ۶

در نهایت برای حالتی که چرخش دستگاه مختصات حول محور z انجام شود (شکل ۷)، داریم:

$$\begin{aligned}\hat{i}' &= (\hat{i}' \cdot \hat{i})\hat{i} + (\hat{i}' \cdot \hat{j})\hat{j} = \cos\phi\hat{i} + \cos(90^\circ - \phi)\hat{j} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j} \\ \hat{j}' &= (\hat{j}' \cdot \hat{i})\hat{i} + (\hat{j}' \cdot \hat{j})\hat{j} = \cos(90^\circ + \phi)\hat{i} + \cos\phi\hat{j} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j} \\ \hat{k}' &= \hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix}$$



شکل ۷

حال اگر چرخش حول یکی از محورهای مختصات نباشد، آنگاه باید این چرخش را به چند چرخش که هر کدام حول یکی از محورهای مختصات انجام می گیرد، تفکیک کنیم و برای هر یک، یک ماتریس دوران بدست آوریم و در نهایت ماتریس های دوران را در یکدیگر ضرب کنیم.

تبدیل دستگاه مختصات ECEF به دستگاه مختصات perifocal

حال با توجه به توضیحات داده شده در قسمت قبل ، باید ماتریس دورانی را بیابیم که دستگاه مختصات ECEF را به دستگاه مختصات perifocal تبدیل کند .

انتقال از دستگاه مختصات ECEF به دستگاه مختصات perifocal از سه دوران تشکیل شده است که در شکل ۸ نشان داده شده است . اولین دوران ، دورانی حول محور Z به اندازه زاویه Ω است . ماتریس این دوران عبارتست از :

$$[R_3(\Omega)] = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه داشته باشید که اندیس ۳ به معنای دوران حول سومین محور مختصات یا Z است .

دومین دوران ، دورانی حول محور X جدید (محور X بعد از دوران اول) به اندازه i است . در اثر این دوران صفحه مدار با صفحه x-y دستگاه مختصات perifocal موازی می شود . ماتریس این دوران عبارتست از:

$$[R_1(i)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

سومین و آخرین دوران نیز حول محور Z جدید و به اندازه زاویه ω است . در اثر این دوران محور X بر محور x منطبق می شود . ماتریس حاصل از این دوران نیز به شکل زیر است :

$$[R_3(\omega)] = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

درنهایت برای بدست آوردن ماتریس دوران از دستگاه مختصات ECEF به دستگاه مختصات perifocal باید سه ماتریس به دست آمده را در یکدیگر ضرب نماییم . ماتریس دوران نهایی عبارتست از :

$$[Q]_{X\bar{x}} = [R_3(\omega)][R_1(i)][R_3(\Omega)]$$

$$[Q]_{X\bar{x}}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega & \sin i \sin \omega \\ -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos i \cos \omega & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos i \cos \omega & \sin i \cos \omega \\ \sin \Omega \sin i & -\cos \Omega \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

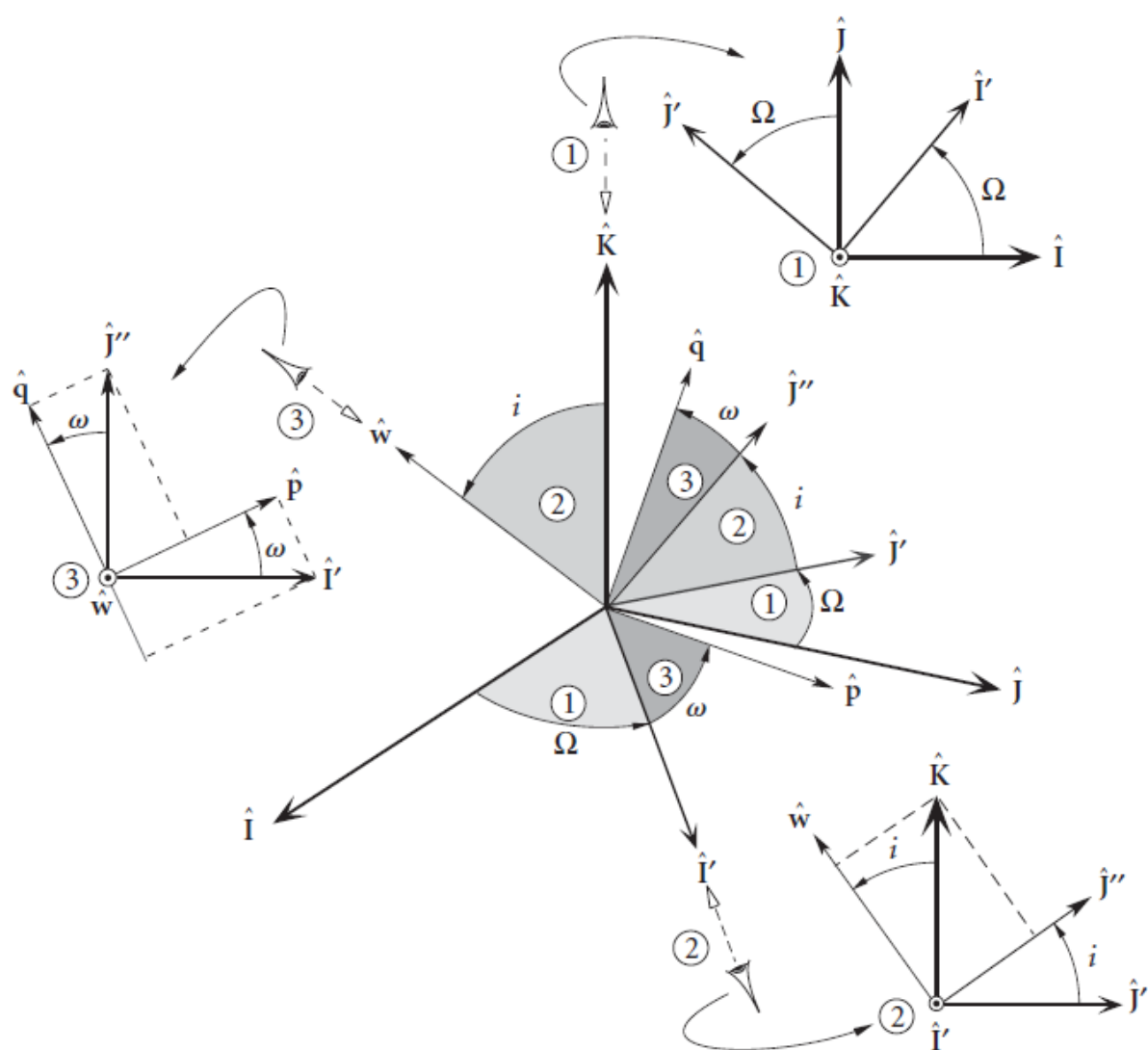
توجه داشته باشید که برای تبدیل دستگاه مختصات perifocal به دستگاه مختصات ECEF باید ماتریس ترانزاده بالا را در نظر بگیریم . یعنی :

$[Q]_{\bar{x}X}$

$$= \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos i \cos \omega & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \cos i \sin \omega & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos i \cos \omega & -\cos \Omega \sin i \\ \sin i \sin \omega & \sin i \cos \omega & \cos i \end{bmatrix}$$

حال کافی است یکی از ماتریس دوران های بالا را در بردار مکان و یا سرعت ضرب کرده تا بردار مکان و زمان در دستگاه دیگر به دست آید :

$$\{\mathbf{r}\}_X = [Q]_{\bar{x}X} \{\mathbf{r}\}_{\bar{x}} \quad \{\mathbf{v}\}_X = [Q]_{\bar{x}X} \{\mathbf{v}\}_{\bar{x}}$$



شکل ۸

مثال ۲) پارامترهای مداری یک ماهواره عبارتند از :

$$h = 80000 \frac{km^2}{s}, \quad e = 1.4, \quad i = 30^\circ, \quad \Omega = 40^\circ, \quad \omega = 60^\circ, \quad \theta = 30^\circ$$

با توجه به داده های بالا بردار مکان و سرعت ماهواره در دستگاه مختصات ECEF را بیابید ؟

$$\{r\}_{\bar{x}} = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{80\,000^2}{398\,600} \frac{1}{1 + 1.4 \cos 30^\circ} \begin{Bmatrix} \cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6285.0 \\ 3628.6 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ km}$$

$$\{v\}_{\bar{x}} = \frac{\mu}{h} \begin{Bmatrix} -\sin \theta \\ e + \cos \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{398\,600}{80\,000} \begin{Bmatrix} -\sin 30^\circ \\ 1.4 + \cos 30^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.4913 \\ 11.290 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\begin{aligned} [Q]_{X\bar{x}} &= \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ & 0 \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ 0 & -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 40^\circ & \sin 40^\circ & 0 \\ -\sin 40^\circ & \cos 40^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.099068 & 0.89593 & 0.43301 \\ -0.94175 & -0.22496 & 0.25 \\ 0.32139 & -0.38302 & 0.86603 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[Q]_{\bar{x}X} = \begin{bmatrix} -0.099068 & -0.94175 & 0.32139 \\ 0.89593 & -0.22496 & -0.38302 \\ 0.43301 & 0.25 & 0.86603 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{r\}_X &= [Q]_{\bar{x}X} \{r\}_{\bar{x}} \\ &= \begin{bmatrix} -0.099068 & -0.94175 & 0.32139 \\ 0.89593 & -0.22496 & -0.38302 \\ 0.43301 & 0.25 & 0.86603 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 6285.0 \\ 3628.6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4040 \\ 4815 \\ 3629 \end{Bmatrix} \text{ (km)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{v\}_X &= [Q]_{\bar{x}X} \{v\}_{\bar{x}} \\ &= \begin{bmatrix} -0.099068 & -0.94175 & 0.32139 \\ 0.89593 & -0.22496 & -0.38302 \\ 0.43301 & 0.25 & 0.86603 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2.4913 \\ 11.290 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10.39 \\ -4.772 \\ 1.744 \end{Bmatrix} \text{ (km/s)} \end{aligned}$$

سیستم مختصات دایره البروجی – خورشید مرکز

برای بیان عناصر مدار سیارات ، دنباله دارها ، سیارک ها و ... نیاز به دستگاه مختصات دیگری داریم که جرم جاذب آن خورشید است و مقیاس های فاصله در آن بزرگتر می شوند . روشن است که دیگر دستگاه مختصات ECEF مفید نخواهد بود زیرا زمین نیز در حال گردش به دور خورشید است .

مرکز این دستگاه مختصات مرکز خورشید و محور X آن در راستای نقطه اعتدال بهاری می باشد . صفحه X-Y منطبق بر صفحه دایره البروج یا همان صفحه ای که مدار زمین در آن قرار دارد است و محور Z از قطب شمال دایره البروج می گذرد .

در زیر مشخصات مداری سیارات منظومه شمسی قرار گرفته است .

	دوره تناوب نجومی	خروج از مرکز	نیم قطر بزرگی Km	میل مدار
Sun	—	—	—	7.25°
Mercury	87.97d	0.2056	57.91×10^6	0.01°
Venus	224.7d	0.0067	108.2×10^6	177.4°
Earth	365.256d	0.0167	149.6×10^6	23.45°
Mars	1.881y	0.0935	227.9×10^6	25.19°
Jupiter	11.86y	0.0489	778.6×10^6	3.13°
Saturn	29.46y	0.0565	1.433×10^9	26.73°
Uranus	84.01y	0.0457	2.872×10^9	97.77°
Neptune	164.8y	0.0113	4.495×10^9	28.32°
Pluto	247.7y	0.2444	5.870×10^9	122.5°

توجه داشته باشید که اکنون میل مداری نسبت به صفحه دایره البروج اندازه گیری می شود .

تمرینات

۱- اگر بردار مکان و سرعت یک ماهواره به ترتیب زیر باشد ، عناصرمداری را بدست آورید.

$$\mathbf{r} = 2615\hat{\mathbf{I}} + 15,881\hat{\mathbf{J}} + 3980\hat{\mathbf{K}} \text{ (km)}$$

$$\mathbf{v} = -2.767\hat{\mathbf{I}} - 0.7905\hat{\mathbf{J}} + 4.980\hat{\mathbf{K}} \text{ (km/s)}$$

۲- بردار مکان و خروج از مرکز یک ماهواره به ترتیب عبارت است از :

$$\mathbf{r} = -6634.2\hat{\mathbf{I}} - 1261.8\hat{\mathbf{J}} - 5230.9\hat{\mathbf{K}} \text{ (km)}$$

$$\mathbf{e} = -0.40907\hat{\mathbf{I}} - 0.48751\hat{\mathbf{J}} - 0.63640\hat{\mathbf{K}}$$

اگر بدانیم که ماهواره به طرف حضیض در حرکت است ، میل مداری ماهواره را بدست آورید؟

۳- بردارهای یکه دستگاه کارتزین uvw نسبت به دستگاه xyz عبارتند از :

$$\hat{\mathbf{u}} = 0.26726\hat{\mathbf{i}} + 0.53452\hat{\mathbf{j}} + 0.80178\hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = -0.44376\hat{\mathbf{i}} + 0.80684\hat{\mathbf{j}} - 0.38997\hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{w}} = -0.85536\hat{\mathbf{i}} - 0.25158\hat{\mathbf{j}} + 0.45284\hat{\mathbf{k}}$$

اگر بردار سرعت در دستگاه xyz ، $\mathbf{v} = -50\hat{\mathbf{i}} + 100\hat{\mathbf{j}} + 75\hat{\mathbf{k}}$ باشد ، بردار سرعت در دستگاه uvw را بیابید؟

۴- در یک زمان دلخواه بردار مکان و زمان ماهواره ای به صورت زیر اندازه گیری می شود:

$$\mathbf{r} = -5102\hat{\mathbf{I}} - 8228\hat{\mathbf{J}} - 2105\hat{\mathbf{K}} \text{ (km)}$$

$$\mathbf{v} = -4.348\hat{\mathbf{I}} + 3.478\hat{\mathbf{J}} - 2.846\hat{\mathbf{K}} \text{ (km/s)}$$

مطلوب است محاسبه بردار مکان و سرعت ماهواره ۵۰ دقیقه بعد ؟

۵- اگر خروج از مرکز ، اندازه تکانه زاویه ای ویژه و آنومالی واقعی به صورت زیر باشند :

$$e = 0.7 \quad , \quad h = 75000 \frac{\text{km}^2}{\text{s}} \quad , \quad \theta = 25^\circ$$

و همچنین ماتریس دورانی که دستگاه ECEF را به دستگاه perifocal تبدیل می کند به صورت زیر باشد :

$$[\mathbf{Q}]_{\text{XCF}} = \begin{bmatrix} -.83204 & -.13114 & 0.53899 \\ 0.02741 & -.98019 & -.19617 \\ 0.55403 & -.14845 & 0.81915 \end{bmatrix}$$

بردار سرعت ماهواره را در دستگاه ECEF به دست آورید ؟