به نام آنکه جان را فکرت آموخت

# آزمون‌های دهمین دوره تابستانی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

## 1393

این مجموعه، سوالاتِ آزمون‌های دهمین دوره تابستانی المپیاد نجوم است که با توجه به پاسخنامه‌هایی که در روز اعتراضات به برد زده شد بازنویسی شده‌اند و ممکن است تفاوت‌هایی جزئی با سوال‌های اصلی داشته باشند.

سوالاتی که با علامت * مشخص شده‌اند، متن اصلی آن‌ها آورده شده است.

# آزمون تئوری میان ترم

**سوال اول: (10 نمره)**

ستاره‌ای فقط از هیدروژن و هلیم تشکیل شده است و در تعادل هیدرواستاتیکی قرار دارد. با فرض اینکه ستاره از گاز کامل تشکیل شده است و چگالی در ستاره ثابت است، رابطه‌ای برای چگالی مرکز ستاره برحسب پارامترهای زیر و ثوابت بدست آورید.

n= کسر جرمی هلیم  $\mu_{m_H}$= جرم اتم هیدروژن  $\mu_{m_{He}}$ = جرم اتم هلیم

R= ثابت گازها  $T_c$ = دمای مرکز  r= شعاع ستاره

**سوال دوم: (10 نمره)**

یونوسفر لایه‌ای از جو است که در ارتفاع 100 کیلومتری قرار دارد. سیگنال‌های رادیویی پس از برخورد به یونوسفر بازتاب می‌شوند. دو نقطه a وb با فاصله 2000 کیلومتر از یکدیگر قرار دارند. از نقطه a سیگنالی به نقطه b ارسال می‌شود.

الف) مسافت پیموده شده توسط سیگنال چقدراست؟

ب) نور خورشید موجب تقویت سیگنال می‌شود. گیرنده چه مدت قبل یا بعد از طلوع خورشید سیگنال تقویت شده را دریافت می کند؟

ج) آیا این پدیده برای شمارش بارش‌های شهابی مفید است؟ چرا؟

**سوال سوم: (15 نمره)**

ستاره‌های 1و2 به ترتیب دمای سطحی $T_1$ و $T_2$ دارند. اگر $\Delta m_{\lambda_1}$ ، اختلاف قدر ستاره‌های 1 و2 در طول موج $\lambda_1$ و $\Delta m_{\lambda_2}$ ، اختلاف قدر این دو ستاره در طول موج $\lambda_2$ را داشته باشیم، با فرض معلوم بودن $\lambda_1$ و $\lambda_2$ و $T_1$ ، $T_2$ را تعیین کنید. ( $hc >> \lambda kT$ )

$$r(\lambda) = \frac{2\pi hc^2 / \lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

**سوال چهارم: (30 نمره)***

یک منجّم حرفه‌ای قصد داشت گذر گانیمِد، بزرگ ترین قمر منظومه ی شمسی را از مقابل مشتری رصد کند. او چند دقیقه قبل از آغاز این رخداد، در یک رصدخانه حاضرشد و بعد از اینکه تلسکوپِ رصدخانه را به سمت مشتری نشانه رفت، شروع به عکس برداری از آن کرد. او بعد از چاپ اولین عکس، متوجه شد که سایه ی گانیمد، روی مشتری افتاده است. این عکس در صفحه ی بعد آورده شده است، اما سایه ی گانیمد در آن حذف شده است.

در لحظه‌ی عکس برداری زاویه‌ی کشیدگی مشتری $88.9°$ بود و زمین در فاصله $0.984$ واحد نجومی از خورشید قرار داشت.

با توجه به ملاحظات زیر به سوالاتی که در ادامه داده شده است، پاسخ دهید.

- از آن جایی که تمایل صفحه ی مداری مشتری نسبت به دایره البروج و هم چنین تمایل صفحه‌ی استوای آن نسبت به صفحه مداری‌اش، مقادیری ناچیز هستند؛ صفحه‌ی استوای مشتری را منطبق بر دایره البروج در نظر بگیرید.
- چرخش سریع مشتری به دور خود باعث پخیِ زیاد این سیاره‌ی گازی شده است، از این رو شکل آن را یک بیضی‌گون در نظر بگیرید که شعاع استوایی‌اش $7.15\times10^{7}\,m$ است.
- خروج از مرکز مدار گانیمد آن قدر کوچک است، که می‌توان مدار آن را با دایره‌ای به شعاع $1.07\times10^{9}\,m$ تقریب زد.

الف) مکان مرکز سایه را با علامت + در عکس نشان دهید. (هر مرحله از روش خود را برای یافتن مکان سایه به طور شفاف شرح داده و سعی کنید در اندازه‌گیری دقت کافی داشته باشید.)

ب) تخمین بزنید، مساحت سایه روی سطح مشتری چند کیلومتر مربع است؟

ج) با استفاده از نتیجه‌ی بخش قبل مساحت سایه درعکس را بر حسب ثانیه قوسی مربع بیابید.

عکس مربوط به سؤال چهارم

**سوال پنجم: (50 نمره)**

فضاپیمایی به جرم $m_s$ به دور زمین با جرم $m_e$ می‌چرخد. مطابق شکل، به این فضاپیما آونگی با جرم $m_p$ متصل است. ($m_p \ll m_s$) طول نخ آونگ را $l$ فرض کنید. (l<<R)

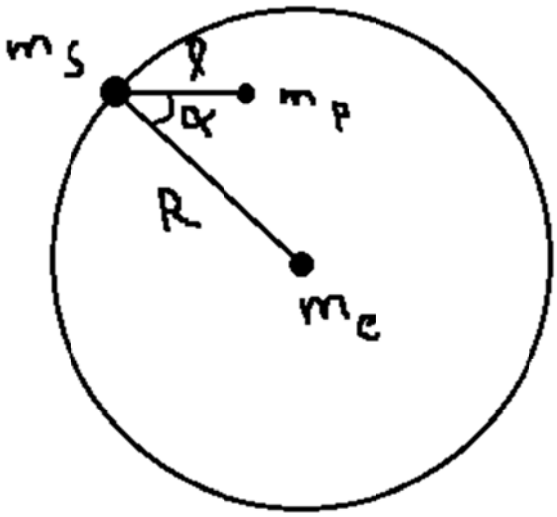
الف) مقدار یا مقادیری از $\alpha$ را که به ازای آنها آونگ در حالت تعادل قرار دارد بیابید.

ب) به ازای مقدار یا مقادیر بالا برای $\alpha$، پایداری یا ناپایداری تعادل را بررسی کنید.

ج) ثابت کنید در حالت تعادل پایدار(در صورت وجود) معادله حرکت زاویه‌ای آونگ حول نقطه تعادل به صورت زیر است و $\omega$ را بدست آورید:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0$$

د) حال فرض کنید که $m_p$ با $m_s$ قابل مقایسه باشد. عناصر مداری ($V,T$ ,...) را که تغییر می‌کند، در حالت جدید بیابید.

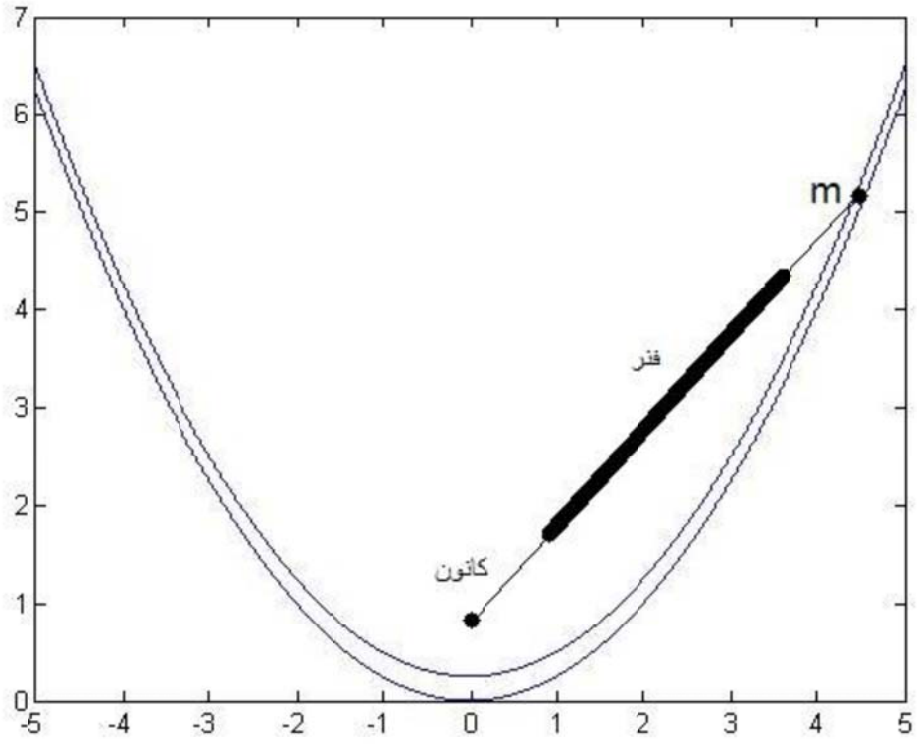



مقیاس در شکل رعایت نشده است.

**سوال ششم: (15 نمره)***

جسمی به جرم $m=1kg$ روی شیار سهموی با فاصله کانونی 1 متر قرار دارد و فقط می‌تواند روی این شیار حرکت کند. تماس جسم و شیار بدون اصطکاک است. جسم با فنری با رابطه نیروی $\vec{F} = -k\vec{r}$ به کانون سهمی متصل است که $k= 1N/m$ می‌باشد. (دقت کنید که طول آزاد فنر صفر است.) هنگامی که جسم در فاصله 7 متر از کانون قرار دارد آن را از حالت سکون رها می‌کنیم.

( شکل صرفا برای روشن شدن مساله است و اندازه ها و ابعاد روی آن ارزشی ندارد.)




الف) زمانی که جسم به فاصله 5 متر از کانون می رسد آهنگ جاروب مساحت توسط فنر را بر حسب متر مربع برثانیه بیابید. (راهنمایی: برای یافتن اندازه‌ی سرعت می توانید از رابطه پایستگی انرژی استفاده کنید.)

ب) زمانی که جسم به فاصله 3 متر از کانون می‌رسد آهنگ جاروب مساحت توسط فنر را بر حسب متر مربع برثانیه بیابید .

ج ) جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را مقایسه کنید و علت فیزیکی **یکسان بودن /یکسان نبودن** آنها را بیان کنید.

# آزمون تئوری پایان ترم
# نوبت اول

**سوال اول: (50 نمره)**

ستاره‌ی آلفا قنطورس ستاره‌ای خورشیدگون است که در فاصله 4 سال نوری از زمین قرار دارد.

الف) قطر دهانه‌ی تلسکوپ فضایی هابل 2.4 متر است. آیا این تلسکوپ می‌تواند آلفا قنطورس را به صورت جسم گسترده تفکیک کند؟

ب) تلسکوپ‌های زمینی کک، دو تلسکوپ 10 متری هستند که با فاصله ی 90 متر از یکدیگر قرار دارند. آیا بوسیله این تلسکوپ‌ها می‌توان آلفا قنطورس را بصورت یک جسم گسترده تفکیک کرد؟

پارامتر فرید (fried) ابعاد کره‌ای است که در آن می‌توان از تغییرات ضریب شکست نور صرف نظر کرد. مقدار این پارامتر در لایه‌های جو 20cm است.

پ) اگر سرعت حرکت ذرات جو در آن لایه‌ها به طور میانگین 10m/s باشد، حداکثر زمان نوردهی که می‌توان در آن از تغییرات ضریب شکست نور صرف نظر کرد، چقدر است؟

پارامتر دید (seeing)، کمترین فاصله‌ی زاویه ایست که با توجه به وجود اعوجاجات جوی قابل تفکیک است.

ت) اگر لایه‌های موردنظر در ارتفاع 15 تا 19 کیلومتری از سطح زمین قرار داشته باشند، حد بالای پارامتر دید را محاسبه کنید.

اپتیک تطبیقی روشی است که در آن با توجه به تغییر مکان یک ستاره‌ی پرنور در اثر اعوجاجات جوی، اثر این اعوجاجات را خنثی می‌کنند و بدین ترتیب پارامتر دید بهبود می‌یابد.

ث) با توجه به زاویه‌ی حدی بدست آمده در بالا می‌توان کل آسمان را به نواحی کوچکتری تقسیم کرد. اگر در هر ناحیه ستاره‌ای پرنور (ستاره‌های با قدر کمتر از 12 پرنور هستند.) وجود داشته باشد می‌توان با تصحیح اعوجاجات جوی پارامتر دید را بهبود داد. برای این کار به چند ستاره‌ی پرنور احتیاج داریم؟

ج) ثابت کنید تعداد ستاره‌های پرنور آسمان خیلی کمتر از ستاره‌های مورد نیاز است. فرض کنید ستاره‌ها همه خورشیدگون هستند و چگالی تعداد آنها $0.15\ \frac{\text{ستاره}}{pc^3}$ است.

چ) چون تعداد ستاره‌های پرنور برای تصحیح اعوجاجات کل آسمان کافی نیست می‌توان با استفاده از لیزر ستاره‌ی پرنور مصنوعی ایجاد کرد. به این ترتیب که لیزری را به لایه‌ای در 92 کیلومتری سطح زمین می‌فرستیم و قسمتی از آن لایه برای ما روشن می شود. توان لیزر حداقل چقدر باید باشد؟

ح) با استفاده از این تکنیک و تصحیح اعوجاجات جوی، پارامتر دید بهبود یافته و به 0.0015 ثانیه قوسی می‌رسد. آیا در این صورت می توان ستاره‌ی آلفا قنطورس را با کمک تلسکوپ‌های کک به صورت یک جسم گسترده تفکیک کرد؟

خ) برای اینکه از این پارامتر دید تصحیح شده بهترین استفاده را ببریم، باید چه نکاتی را در ساخت رصدخانه لحاظ کنیم؟

**سوال دوم: (35 نمره)**

خوشه‌ای در نظر بگیرید که شعاع نیمه‌جرم آن در زمان $t = 0$ ، $r_h(0)$ است. تغییرات شعاع نیمه‌جرم خوشه با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\frac{\dot{r}_h}{r_h} = \frac{\xi}{t_{r_h}}$$

که در آن $\xi$ یک ثابت و $t_{r_h}$ مدت زمان واهلش خوشه است که با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$t_{r_h} = \frac{0.138 N^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}} \ln \Lambda} r_h^{\frac{3}{2}}$$

که در آن N تعداد ذرات و $\Lambda$ یک ثابت است.

الف) رابطه‌ای برای شعاع خوشه بر حسب زمان بدست آورید و نمودار آن را به طور کیفی رسم کنید.

در چه زمانی شعاع خوشه صفر است؟ (فرض کنید جرم خوشه تغییری نمی‌کند.)

ب) حال تغییرات جرم خوشه را در نظر بگیرید که با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\frac{\dot{M}}{M} = \frac{-\xi}{t_{r_h}}$$

1- رابطه‌ای برای جرم خوشه بر حسب زمان بدست آورید.
2- در چه زمانی جرم خوشه صفر می‌شود؟
3- رابطه‌ای برای شعاع خوشه بر حسب زمان بدست آورید و نمودار آن را به طور کیفی رسم کنید.

**سوال سوم: (25 نمره)**

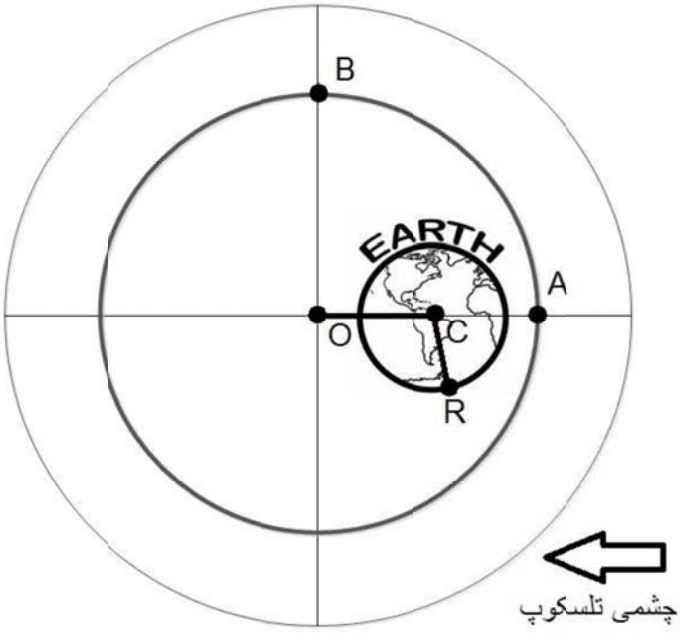
در روز 16 شهریور، دوره تناوب حرکت تقدیمی زمین چقدر بشود تا هفت روز بعد خورشید کمترین میل ممکن را داشته باشد؟ با این دوره تناوب، پس از گذشت 365 روز چند فصل سپری شده است؟

**سوال چهارم: (50 نمره)***

ماهواره‌ای در حال گردش به دور زمین می باشد .در یک لحظه در دستگاه مختصاتی که مبدا آن منطبق بر مرکز زمین است، محور Z آن به سمت قطب شمال و محور X آن به سمت اعتدال بهاری است مکان و سرعت ماهواره عبارتند از:

$$\vec{r}=10000\hat{\imath}+15000\hat{\jmath}+5000\hat{k} \quad (km)$$
$$\vec{v}=2000\hat{\imath}-1000\hat{\jmath}+3000\hat{k} \quad (m/s)$$

ساکنین منظومه دوردست " بوف " با تلسکوپ‌های فوق العاده قوی خود مشغول رصد زمین هستند و از درون چشمی تلسکوپشان مدار ماهواره را به صورت یک دایره به دور زمین می‌بینند (شکل زیر)




در شکل فوق مرکز چشمی بر مرکز مدار منطبق است .مدار دایره ای است که از نقاط A و B می گذرد و زمین نیز مشخص است. ابعاد و اندازه‌های روی شکل هیچگونه اهمیتی ندارند و این شکل صرفا برای روشن شدن مساله می باشد.

الف) بعد و میل منظومه " بوف " را بیابید. (اگر مساله بیش از یک جواب دارد بعد و میل تمامی جواب‌ها را بیابید.)

ب) نسبت فاصله مرکز مدار دایروی ظاهری تا مرکز زمین به شعاع زمین چقدر است؟ (یعنی $OC/CR=?$ )
ج) اگر در شکل نشان داده شده جسم ساعتگرد حرکت کند، چه مدت طول می‌کشد که ماهواره از نقطه A به نقطه B برسد؟
د) هنگامی که ماهواره به نقطه B می‌رسد سرعت زاویه‌ای آن حول نقطه O از دید ناظرین منظومه "بوف "چند درجه در دقیقه است؟

**سوال پنجم: (25 نمره)**

کیهانی را درنظر بگیرید که از دو مولفه A وB با چگالی‌های $n_A$ و $n_B$ ( $n_A=n_B$ ) و سطح مقطع‌های $\sigma_A$ و $\sigma_B$ تشکیل شده است. در زمان واجفتیدگی ذرات با هم ترکیب شده و ذره ای با سطح مقطع $\sigma_{AB}$ تشکیل می‌دهند و بدین صورت عالم برای فوتون‌ها شفاف می شود. اما پس از مدتی بازیونش رخ می‌دهد و ذرات A وB دوباره از هم جدا شده و جهان کدر می‌شود. کیهان را تخت و ماده غالب در نظر بگیرید.

الف) رابطه‌ای برای قرمزگرایی در زمان بازیونش، z ، بر حسب قرمزگرایی در زمان واجفتیدگی، $z_{dec}$ ، بدست آورید به گونه ای که پس از بازیونش جهان هم چنان برای فوتون ها شفاف بماند.
ب) با فرض $z_{dec} = 1100$ و $\sigma_{AB}=\sigma_B=\sigma_A$ مقدار عددی z را بدست آورید.

**سوال ششم: (25 نمره)**

اجرام کوییپری (KBO ) در منظومه شمسی قرار دارند. این اجرام بخشی از نور تابیده شده به آنان از طرف خورشید را بازتاب کرده و بخش باقیمانده را جذب و به صورت تابش حرارتی جسم سیاه منتشر می‌کنند. یک جرم کوییپری را در نظر بگیرید که در حالت مقابله قرار دارد.

الف) منجم X میخواهد شار بازتابی دریافتی از جسم را اندازه گیری کند. این منجم باید در چه محدوده طول موجی رصد کند؟

ب) رابطه ای برای شار بازتابی دریافتی از KBO پیدا کنید.

ج) منجم Y می خواهد شار تابش حرارتی دریافتی از جسم را اندازه گیری کند. رابطه ای برای شار تابش حرارتی دریافتی از KBO پیدا کنید.

د) اگر حرکت مشخصه مشاهده شده از KBO ، 0.83 ثانیه قوسی بر ثانیه باشد، فاصله ی KBO تا زمین را تخمین بزنید. (از اثرات ناشی از اختلاف منظر صرف نظر کنید.)

و) منجم Y باید در چه طول موجی رصد کند؟

ه) آیا منجم X به تنهایی می‌تواند شعاع جسم را پیدا کند؟ منجم Y چطور؟ آیا این دو منجم با یکدیگر می‌توانند شعاع جسم را محاسبه کنند؟

**سوال هفتم: (30 نمره)**

جذب در جو موجب کاهش قدر ستارگان می شود. جو را متشکل از گاز کامل در نظر بگیرید که به علت گرانش در تعادل هیدرو استاتیکی قرار دارد.

فروسرخ نزدیک: $\kappa_\lambda = 0.1 \frac{m^2}{kg}$

مرئی: $\kappa_\lambda = 0.0001 \frac{m^2}{kg}$

الف) اختلاف قدر ناشی از جذب را برای ستاره ای در سرسو برای طول موج های مرئی و فروسرخ نزدیک بدست آورید.

ب) اگر با تلسکوپی که در ارتفاع 5 کیلومتری قرار دارد به رصد بپردازیم، آنگاه اختلاف قدر را برای ستاره ای در سرسو در طول موج های مرئی و فروسرخ نزدیک بدست آورید.

# آزمون تئوری پایان ترم
# نوبت دوم

**سوال اول: (50 نمره)***

فرض کنیم رابطه نیرویی که جسمی با جرم $m_1$ در مکان $\overrightarrow{r_1}$ به جسمی با جرم $m_2$ که در مکان $\overrightarrow{r_2}$ قرار دارد وارد می کند به جای $\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{|\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1}|^3}(\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1})$ به صورت $\overrightarrow{F'} = -\frac{Hm_1^i m_2^j}{|\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1}|^3}(\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1})$ باشد که H ثابتی مثبت است و i و j اعدادی صحیح و مثبت‌اند.

الف) اثبات کنید i و j با هم برابرند.

در یک جهان فرضی رابطه گرانش به صورت $F'$ با $i=j=3$ است و دوره تناوب حرکت دایره ای دو جسم مشابه زمین و خورشید که به فاصله 1 واحد نجومی از یکدیگر قرار دارند 1 سال است.

ب) در این جهان اگر در لحظه t=0 دو جسم با جرم برابر با 0.01 جرم خورشید با مکان ها و سرعت های زیر( در یک دستگاه لخت ) داشته باشیم .پس از مدت زمان 0.8 سال مکان جرم 2 را بیابید.

$$\overrightarrow{r_1}=3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-2\hat{k}\ ,\ \ \overrightarrow{r_2}=-2\hat{\imath}+4\hat{\jmath}-\hat{k} \qquad (AU)$$
$$\overrightarrow{v_1}=-10\hat{\imath}+10\hat{\jmath}+30\hat{k}\ ,\ \ \overrightarrow{v_2}=20\hat{\imath}+10\hat{\jmath}+10\hat{k} \qquad (km/s)$$

پ) در این جهان اگر جسمی با جرم 1 کیلوگرم را با سرعت v از سطح زمین به صورت عمودی پرتاب کنیم، جسم تا ارتفاع h ($h \ll Re$) بالا می رود .اگر جسمی با جرم 2 کیلوگرم را با همان سرعت v به صورت عمودی پرتاب کنیم جسم تا چه ارتفاعی(بر حسب h) بالا خواهد رفت؟

ت) آیا در این جهان چیزی به نام سرعت فرار از زمین موضوعیت دارد؟ اگر جواب منفی است، به جای سرعت فرار چه کمیتی را می توان برای فرار از گرانش زمین تعریف کرد که برای همه اجسام برابر باشد؟

**سوال دوم: (25 نمره)**

واجفتیدگی هنگامی رخ می‌دهد که طول پویش آزاد میانگین فوتون‌ها با شعاع علّی عالم (افق ذره) برابر شود. در جهان تخت و ماده غالب قرمزگرایی زمان واجفتیدگی را حساب کنید.

$$n_0 = 2.1 \times 10^{-7}\ cm^{-3}$$
$$\sigma = 6 \times 10^{-29}\ m^2$$
$$H_0 = 67.8\ kms^{-1}Mpc^{-1}$$

**سوال سوم: (20 نمره)**

هواپیمایی با سرعت $800\ km/h$ نسبت به سطح زمین از شهری با عرض جغرافیایی $60$ درجه در مسیری که با جنوب زاویه $60$ درجه می‌سازد به سمت جنوب غرب شروع به پرواز می‌کند. این هواپیما فقط از نیروی پیشرانه استفاده می‌کند و سرعت آن نسبت به مرکز زمین ثابت است. ناظر روی هواپیما هنگام برخاستن، ستاره‌ای را در زاویه سمت‌الراسی $z_0 = 30°$ در جهت جنوب مشاهده می‌کند. چند ساعت بعد این ستاره از دید هواپیما کمترین فاصله‌ی سمت‌الراسی ممکن را خواهد داشت؟ میزان این کمترین فاصله‌ی سمت‌الراسی چقدر است؟

**سوال چهارم: (50 نمره)**

الف) ستاره‌ای با جرم واحد در مدار دایره‌ای به شعاع $r_0$ با سرعت زاویه‌ای $\Omega_0$ در حال گردش است. رابطه‌ای برای $\Omega_0$ بر حسب $\Omega_0$ و تابع پتانسیل ($\Omega_0$ ) بدست آورید.

می‌توانیم فرض کنیم که تابع پتانسیل در ابتدا شکلی متقارن و مستقل از زمان داشته است. (هم چنین از تغییرات تابع در راستای $z$ صرفنظر می‌کنیم.) و سپس بدلیل یک اختلال خارجی تابع پتانسیل تغییر می‌کند. این تغییرات را کوچک و مطابق فرم زیر در نظر بگیرید:

$$\Phi(r, \alpha, t) = \Phi_0(r) + \varepsilon\Phi_1(r, \alpha, t)$$

که در رابطه ی فوق $\varepsilon$ یک عدد بی بعد بسیار کوچک می باشد. در واقع شکل تابع فوق را بصورت جمع حالت اولیه متقارن و مستقل از زمان + جملات نامتقارن و اختلالی وابسته به زمان در نظر می‌گیریم. $r$ و $\alpha$ فاصله و زاویه در دستگاه قطبی هستند.

ب) شتاب در دستگاه استوانه‌ای را بنویسید و با مساوی قرار دادن آن با نیرو یک دستگاه معادلات بدست آورید و آنرا تا مرتبه اول نسبت به $\varepsilon$ ساده کنید.

راهنمایی: گرادیان در دستگاه استوانه‌ای بصورت زیر است:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \alpha}\hat{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

حال به دستگاه نالختی که با سرعت زاویه‌ای $\Omega_b$ می‌چرخد می‌رویم. بازوهای کهکشان در این دستگاه ساکن هستند. اگر $\theta$ زاویه‌ی قطبی اندازه گیری شده در این دستگاه باشد، در این صورت:

$$\alpha = \theta + \Omega_b t$$

پ) با استفاده از رابطه‌ی بالا $\alpha$ را حذف کرده و دستگاه معادلات را بر حسب $\theta$ بازنویسی کنید.

می‌توان مدار ستاره را یک مدار دایره‌ای مختل شده فرض کرد. بنابراین داریم:

$$r(t) = r_0 + \varepsilon r_1(t)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \varepsilon \theta_1(t)$$

ت) $r$ و $\theta$ را جایگذاری کنید و معادلات را تا مرتبه اول نسبت به $\varepsilon$ ساده کنید.
سپس جملات مرتبه صفرم را مساوی قرار دهید و رابطه‌ای برای $\theta_0(t)$ بدست آورید.

ث) جملات مرتبه یکم را مساوی قرار دهید و دستگاه معادلات دیفرانسیلی بدست آورید.

ج) تابع $\Phi_1$ با رابطه‌ی زیر داده می شود. این تابع را در معادلات بالا جایگذاری کنید و نشان دهید:

$$\ddot{r_1} + {k_0}^2 r_1 = g(t)$$

سپس $k_0$ و $g(t)$ را حساب کنید.

$$\Phi_1(r, \theta) = f(r)\cos(m\theta)$$

چ) شرط پایداری مدار دایره‌ای ستاره‌ای با سرعت زاویه‌ای $\Omega_b$، چیست؟

$\Phi_0$ از رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\Phi_0(r) = \frac{V_m^2}{2}\ln(r_0^2 + r^2)$$

ح) از معادلات دیفرانسیل انتگرال بگیرید و $\theta_1(t)$ را بر حسب $r_0$ و $\Omega_0$ و ثوابتی که به شرایط اولیه بستگی دارند، بدست آورید.

**سوال پنجم: (35 نمره)**

واجفتیدگی در یک قرمزگرایی خاص روی نداده است، بلکه در پوسته‌ای به ضخامت $\Delta z$ اتفاق افتاده است. اگر $P(z)dz$ احتمال این باشد که فوتون‌های CMB که به ما می‌رسد از ناحیه‌ای بین $z$ و $z + dz$ آزاد شده باشند، ثابت کنید:

$$P(z) = e^{-\tau(z)}\frac{d\tau(z)}{dz}$$

که $\tau(z)$ عمق اپتیکی تا قرمزگرایی $z$ است.

ب) $\tau(z)$ با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\tau(z) = \Omega_B^{0.43}(\frac{z}{1000})^{16+1.8ln\Omega_B}$$

به ازای $\Omega_{B_1} = 0.04$ و $\Omega_{B_2} = 0.01$ و با انتخاب بازه‌های مناسب، نمودار $P(z)$ بر حسب $z$ را رسم کنید. (برای رسم نمودار حداقل 15 نقطه لازم است.) حال با توجه به نمودار مقدار $\Delta z$ را به ازای هر $\Omega_B$ بدست آورید.

**سوال ششم: (10 نمره)**

الف) تخمین بزنید حجم آب کره‌ی زمین چند لیتر است؟

ب) اگر سطح کنونی زمین همانند تصور پیشینیان تخت بود، سطح آب چقدر بالاتر یا پایین تر از سطح میانگین کنونی آب‌های آزاد قرار می‌گرفت؟