به نام خداوند بخشنده‌ی مهربان

پاسخ نامه اولین آزمون آزمایشی مرحله اول

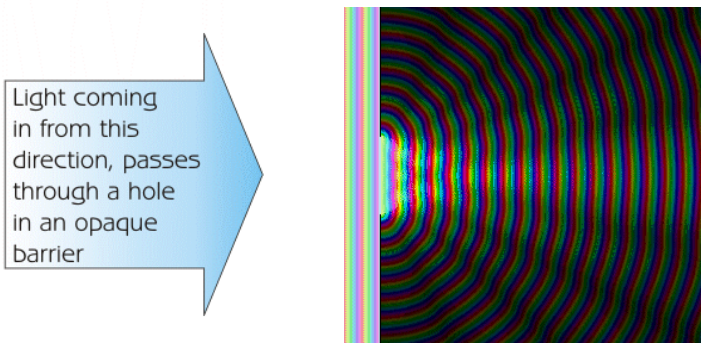
المپیاد نجوم و اخترفیزیک

تهیه و تنظیم : اعضای تیم نهمین المپیاد جهانی نجوم و اختر فیزیک

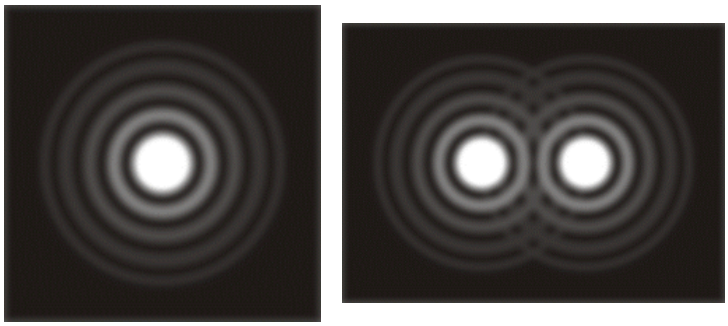
توضیحات : این راه حل ها تنها راه حل های ممکن برای سوالات نیستند و ممکن است چند راه حل برای یک سوال وجود داشته باشد .

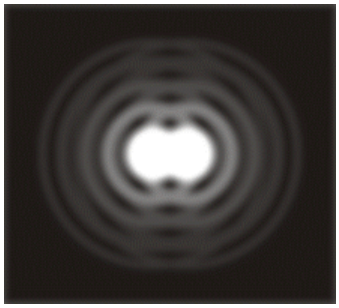
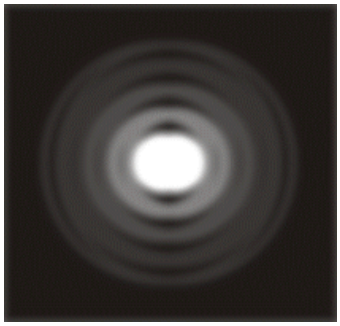
سوال 1) گزینه " الف و ب " پاسخ صحیح است .

به خاطر این که جبهه موج نوری رسیده به ما از طرف ستاره تقریباً تخت است و دهانه‌ی تلسکوپ در مقایسه با فاصله‌ی بین ستاره و زمین و همچنین اندازه‌ی کلی جبهه موج بسیار بسیار کوچک است، لذا دهانه‌ی تلسکوپ که جبهه موج قرار است از آن بگذرد در حکم یک روزنه‌ی بسیار کوچک است برای جبهه موج نوری. از طرفی می دانیم به خاطر خاصیت موجی نور در انتقال و اصل هویگنس، موج نور پس از عبور از روزنه‌ی کوچک انگار خودش یک منبع موج جدید ایجاد می‌کند و به خاطر اختلاف راه طی شده (تا پرتوها برسند به پرده یا چشم ناظر) بین پرتوهای ساطع شده از نقاط مختلف روزنه و این که موج ها با هم تداخل می‌کنند طرح پراش شکل می‌گیرد. هنگامی که دو ستاره را می‌بینیم در واقع داریم به دو طرح پراش نگاه می‌کنیم. تشخیص دادن یک ستاره از ستاره‌ی دیگر نیاز به تعریف معیاری دارد. فعلاً آن معیار را این گونه تعریف می‌کنیم که بیشینه‌ی اولی طرح پراش یک ستاره بیفتد روی کمینه‌ی اولی طرح پراش ستاره دیگر. اگر فاصله‌ی زاویه‌ای بین دو ستاره بیش از این مقدار بحرانی باشد آن گاه قله‌های پراش دو ستاره کاملاً از هم جدا می‌افتد و می‌توانیم دو ستاره را تشخیص دهیم و اگر کمتر باشد دو قله تقریباً می‌افتد روی هم و تشخیص سخت می‌شود.



شکل این اثر را در زیر مشاهده میکنید :



عکس‌ها از سایت:

http://www.rocketmime.com/astronomy/Telescope/ResolvingPower.html

سوال 2) گزینه "د" پاسخ صحیح است .

وقتی از حرکات وضعی و انتقالی خورشید صرف نظر شود عامل تاثیر گذار در پهن شدگی خط طیفی ،سرعت کاتوره ای مولکول های گاز درسطح ستاره (پهن شدگی دوپلری)خواهد بود .به عنوان یک تقریب خوب میتوانیم خورشید را متشکل از گاز هیدروژن بگیریم .پس داریم :

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2K_BT}{\overline{m}}} \approx \sqrt{\frac{2K_BT}{m_p}} = 9.77\ \frac{km}{s}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{2v_{mp}}{c} \rightarrow \Delta\lambda = \frac{2v_{mp}}{c}\ \lambda_0 \rightarrow \Delta\lambda = 0.043 \approx 0.05\ nm$$

سوال 3) گزینه " ب " پاسخ صحیح است .

میدانیم که فشار تابشی در ستارگان پیر تر و همچنین در ستارگان پر جرم تر از اهمیت بیشتری بر خوردار است .پس با افزایش جرم ، چون سهم فشار تابشی افزایش می یابد β باید کم شود . همچنین چون جرم با درخشندگی رابطه مستقیم دارد . پس با افزایش β (یعنی در جرم های کمتر) درخشندگی کاهش می یابد . و چون ستارگان پیر تر μ بزرگتری دارند . پس با افزایش β (یعنی ستاره های جوان تر) μ کاهش می یابد .

رابطه بین جرم و μ و β به صورت زیر است که میتوانید اثبات آن را در فصل پنج کتاب $stellar\ astrophysics$ مشاهده کنید :

$$1 - \beta = 0.003 \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^2 \mu^4\beta^4$$

سوال 4) گزینه " الف " پاسخ صحیح است .

طبق فرض سؤال :

$$\text{جرم ستاره } M_* \approx \text{جرم هسته } M_c$$

چون فرآیند شبه تعادلی است قضیه ویریال را برای آن به کار میبریم :

$$2K + U = 0 \quad \rightarrow \quad E = K + U = -K = -\frac{U}{2}$$

از طرفی چون فرآیند در مقایسه با مقیاس های نجومی در زمان کمی اتفاق میافتد ، لذا میتوان فرض کرد انرژی خارج شده از سیستم توسط تابش بسیار نا چیز است. پس طبق رابطه پایستگی تقریبی انرژی داریم :

$$E = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}\frac{GM_c^2}{R_c} - \frac{\alpha G M_*^2}{R_*}\right) \approx \frac{3}{10}\frac{GM_c^2}{R_c} + \frac{1}{2}\frac{\alpha G M_c^2}{R_*}$$

$$E' = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}\frac{GM_c^2}{\frac{R_c}{2}} - \frac{\alpha G M_*^2}{5R_*}\right) = \frac{6}{10}\frac{GM_c^2}{R_c} + \frac{1}{10}\frac{\alpha G M_c^2}{R_*}$$

$$E \approx E' \quad \rightarrow \quad \frac{6}{10}\frac{GM_c^2}{R_c} + \frac{1}{10}\frac{\alpha G M_c^2}{R_*} \approx \frac{3}{10}\frac{GM_c^2}{R_c} + \frac{1}{2}\frac{\alpha G M_c^2}{R_*}$$

$$\frac{3}{10}\frac{GM_c^2}{R_c} = \frac{4}{10}\frac{\alpha G M_c^2}{R_*} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{4}\frac{R_*}{R_c} = 1.5$$

سوال 5) گزینه " الف " پاسخ صحیح است .

از قانون ویریال برای سیستم‌های تعادلی استفاده می‌کنیم:

$$2K + U = 0 \quad \text{و} \quad E = K + U \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{U}{2}$$

دقت کنید که قبل از رمبش دلیلی ندارد که بتوانیم از قضیه ویریال استفاده کنیم چرا که ممکن است در شرایط غیر تعادلی و نه حتی شبه تعادلی باشیم .

قبل از رمبش:

$$E_0 = K_0 + U_0$$

چون که ابعاد سحابی بسیار بزرگ و از طرفی دیگر جرم محدودی (برابر با جرم خورشید چون که در آخرش قرار است به ستاره ای خورشیدگون تبدیل شود) دارد لذا :

$$U_0 \approx 0$$

$$E_0 \approx K_0 = \frac{5}{2}\, Nk_BT = \frac{5}{2}\frac{M_{\text{خورشید}}}{m_{H_2}}k_BT = \frac{5}{4}\frac{M_{\text{خورشید}}}{m_H}k_BT$$

از طرفی پس از رمبش ستاره در تعادل قرار میگیرد و قضیه ویریال را میتوان نوشت :

$$E_1 = \frac{U_1}{2} = -\frac{3}{10}\frac{GM^2_{\text{خورشید}}}{R_{\text{خورشید}}}$$

حال چون سحابی با درخشندگی ثابت تابش میکرده است و در آخر هم درخشندگی اش برابر با درخشندگی خورشید شده است پس در طول مسیر با درخشندگی خورشید تابش میکرده است :

$$|E_1 - E_0| = L_{\text{خورشید}}\, t = \frac{3}{10}\frac{GM^2_{\text{خورشید}}}{R_{\text{خورشید}}} + \frac{5}{4}\frac{M_{\text{خورشید}}}{m_H}k_BT$$

$$t = \frac{1}{L_{\text{خورشید}}}\left(\frac{3}{10}\frac{GM^2_{\text{خورشید}}}{R_{\text{خورشید}}} + \frac{5}{4}\frac{M_{\text{خورشید}}}{m_H}k_BT\right) \approx 9.38\, Myr$$

سوال 6) گزینه " ب " پاسخ صحیح است .

میدانیم که مکان هندسی نقاطی که مجموع فاصله شان از دو نقطه مشخص در صفحه ، مقدار ثابتی باشد یک بیضی است و همچنین در بیضی داریم :

$$l = 2a \quad \text{و} \quad s = 2ae \quad \rightarrow \quad a = 5cm \ \text{و} \ e = 0.5$$

دقت کنید که سرعت رنگ شدن نخ برابر است با سرعت شعاعی (شعاع منظور فاصله نوک خودکار تا کانون سمت راست است) خودکار چرا که رنگ شدن نخ یعنی کشیده شدن خودکار در طول نخ، بنابراین فقط به فاصله ی نوک خودکار تا کانون بستگی دارد. لذا باید مؤلفه سرعت را در طول نخ یا به عبارت دیگر به راستای شعاعی بیابیم :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta} \quad \text{و} \ v_r = \dot{r} \quad \text{و} \ v_\theta = r\dot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

در این مسئله v را داریم و $\dot{r}$ را میخواهیم :

$$\dot{r} = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)^2} e\sin\theta \;\; \dot{\theta} = r\dot{\theta}\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$\rightarrow \; v^2 = r^2\dot{\theta}^2\left(1+\left(\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)^2\right) \rightarrow \; r^2\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{\left(1+\left(\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)^2\right)}$$

$$\dot{r} = v\frac{e\sin\theta}{\sqrt{(1+e\cos\theta)^2+(e\sin\theta)^2}} = v\,\frac{e\sin\theta}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}} \approx 2.24\frac{mm}{s}$$

سوال 7) گزینه " الف " پاسخ صحیح است .

علت اختلاف زمانی بین فوتون و نوترینو این است که فوتون در طول مسیر با ذرات برخورد میکند ولی نوترینو بدلیل سطح مقطع کم هیچ برخوردی با ذرات دیگر ندارد . اگر تعداد برخورد ها را با N و طول پویش آزاد فوتون را با l نشان دهیم ، داریم :

$$t_{ph} = N\frac{l}{c}\,, N = \left(\frac{d}{l}\right)^2 \rightarrow t_{ph} = \left(\frac{d}{l}\right)^2 .\; \frac{l}{c} = \frac{d^2}{lc}$$

$$l = \frac{1}{\kappa\rho} \rightarrow t_{ph} = \frac{d^2\kappa\rho}{c}$$

$$\rho = \frac{3M}{4\pi d^3} \rightarrow d = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow t_{ph} = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\kappa\rho}{c}$$

اما برای نوترینو داریم :

$$t_{no} = \frac{d}{c} \rightarrow t_{ph} - t_{no} = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\kappa\rho}{c} - \frac{d}{c} \rightarrow \; \Delta t = 15\; s$$

سوال 8) گزینه‌ی "الف" پاسخ درست است.

وجود نواحی یونش در ستاره عاملی برای ایجاد ناپایداری دینامیکی است؛ به گونه‌ای که ممکن است موجب به هم خوردن تعادل هیدروستاتیک شود. به علاوه ممکن است عامل ایجاد همرفت شود. (گزینه‌ی الف) با این که همرفت تنها یک فرایند انتقال انرژی است و اثرات ویران‌کننده ندارد، می‌توان آن را نوعی ناپایداری دینامیکی به حساب آورد. (گزینه‌ی ب) در ستاره‌های کم‌جرم به علّت جذب مقید-آزاد هیدروژن و هلیوم

کدریت به حدّ زیادی افزایش می‌یابد و انتقال انرژی به وسیله‌ی تابش کافی نخواهد بود. (گزینه‌ی ج) در ستاره‌های خورشیدگون نیز به علّت تابشی بودن هسته، مواد داخل هسته با یکدیگر ترکیب نشده و ترکیب هسته متفاوت می‌ماند. (گزینه‌ی د)

سوال 9) گزینه " د " پاسخ صحیح است .

ما میدانیم که انرژی مدار سهمی دقیقا برابر صفر است و اینکه مدار سهمی صرفا یک حالت حدی است.و هیچ ذره‌ای وجود ندارد که انرژی آن برابر صفر باشد پس بدون توجه به بقیه‌ی سوال جواب صفر درصد میشود .

سوال 10) گزینه " د " پاسخ صحیح است.

f_e فاصله کانونی چشمی و f_o فاصله کانونی شیئی است .

$$f_e = 0.02 + \frac{0.02}{\left(FOV(rad) \times \frac{180}{\pi}\right)^2}$$

$$f_e \left(\frac{FOV(rad)}{2}\right) = f_o\, \theta(rad)$$

$$\theta(rad) = \frac{1}{f_o} \times \left(0.01\, FOV(rad) + 0.01 \times \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \times \frac{1}{FOV(rad)}\right)$$

$$\frac{d\theta}{d\, FOV} = \frac{1}{f_o} \times \left(0.01 - 0.01 \times \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \times \frac{1}{FOV^2(rad)}\right) = 0 \quad \rightarrow$$

$$FOV(rad) = \frac{\pi}{180} rad$$

$$\theta(rad) = \frac{1}{f_o} \times \left(0.01 \frac{\pi}{180} + 0.01 \times \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \times \frac{1}{\frac{\pi}{180}}\right)$$

$$= \frac{1}{f_o} \times \left(0.01 \frac{\pi}{180} + 0.01 \times \frac{\pi}{180}\right) = \frac{0.01}{1} \frac{\pi}{90}$$

برای هر کره به شعاع R دلخواه ، مساحت عرقچین مربوط به FOV به صورت زیر است .

$$S_{\text{میدان دید}} = 2\pi R^2 \left(1 - \cos\left(0.01 \frac{\pi}{90}\, rad\right)\right)$$

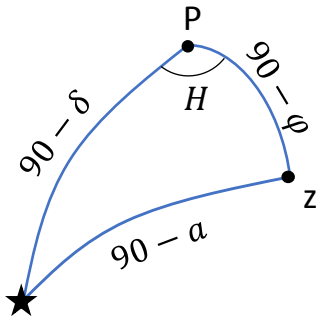
پس کسری از آسمان بالای سر که دیده میشود برابر است با :

$$\frac{2\pi R^2\left(1-\cos\left(0.01\frac{\pi}{90}\ rad\right)\right)}{2\pi R^2}=1-\cos\left(0.01\frac{\pi}{90}\ rad\right)\approx 6.1*10^{-8}$$

جواب فوق میدان دید کمینه را میدهد ، چون مشتق دوم میدان دید به ازای

$$FOV(rad)=\frac{\pi}{180}rad$$

مثبت است.



سوال 11) گزینه " ب " پاسخ صحیح است .

ابتدا میل و زاویه ساعتی ستاره را حساب میکنیم :

با توجه به شکل داریم :

$$\sin\delta=\sin a\sin\phi_1+\cos a\cos\phi_1\cos A\ \rightarrow \delta=16.082\ ^\circ$$

$$\frac{\sin H_1}{\cos a}=\frac{\sin A}{\cos\delta}\rightarrow H_1=26.75\ ^\circ$$

با توجه به فورمول کسینوس ها ، میتوانیم بفهمیم که جواب درست را برای H انتخاب کردیم .

حال با توجه به رابطه بین زمان نجومی در طبس و تهران داریم :

$$LST_{\text{طبس}}-\Delta l=LST_{\text{تهران}}\rightarrow H_1+\alpha-\Delta l=H_2+\alpha\ \rightarrow H_2=21.585\ ^\circ$$

حال سمت و ارتفاع جسم از دید ناظر تهران را حساب میکنیم :

$$\cos a'=\sin\delta\sin\phi_2+\cos\delta\cos\phi_2\cos H_2\rightarrow a'=62.5^\circ$$

$$\frac{\sin A}{\cos\delta}=\frac{\sin H}{\cos a}\rightarrow A=130\ ^\circ$$

رابطه سینوس ها دو جواب به ما میدهد که با توجه به رابطه کسینوس ها متوجه میشویم که جواب فوق قابل قبول است .

سوال 12) گزینه‌ی "الف" پاسخ درست است.

ناهمسانگردی‌های تابش زمینه‌ی کیهانی ، ابرخوشه‌های کهکشانی را شکل دادند و سایر ساختارها، منشأهای دیگری برای تشکیل داشته‌اند. هدف از این سؤال انجام محاسبات نبوده‌است، امّا می‌توان با محاسبه‌ی اندازه‌ی فعلی یک ناهمسانگردی دمایی و مقایسه‌ی آن با ابعد ساختارهای کیهانی، به پاسخ درست پی برد.

سوال 13) گزینه " د " پاسخ صحیح است .

به خاطر شکست نور توسط آب ، ناظر ارتفاع ستاره را چیز دیگری می‌بیند . ولی دقت کنید که سمت‌ها ثابت می‌مانند چرا که طبق قضیه‌ای در مورد پرتوی عبوری و بازتابی از یک سطح داریم که این پرتوها در همان صفحه تابش (یعنی صفحه‌ای که از پرتو تابش و خط عمود بر سطح ماده بازتاب کننده یا عبور دهنده می‌گذرد) می‌مانند. لذا چون صفحه تابش از سمت الرأس می‌گذرد و با یک سمت مشخصی قرار گرفته است، چون پرتو عبور کرده بعد از تابش هم در همان صفحه می‌ماند ، سمت عوض نمی‌شود و فقط ارتفاع عوض می‌شود. ابتدا فاصله زاویه‌ای زاویه‌ای دو ستاره در حالت اول θ را حساب میکنیم :

$$\cos\theta = \sin a_1 \sin a_2 + \cos a_1 \cos a_2 \cos(A_2 - A_1) \quad \Longrightarrow \quad \theta \approx 13.48°$$

حال ارتفاع جدید دو ستاره را با توجه به قانون اسنل-دکارت حساب میکنیم :

$$n\sin(90 - a') = \sin(90 - a) \quad \rightarrow \quad a' = \cos^{-1}\left(\frac{\cos a}{n}\right)$$

$$\rightarrow \; a'_1 \approx 45.19° \quad \text{و} \quad a'_2 \approx 49.49°$$

$$\cos\theta' = \sin a'_1 \sin a'_2 + \cos a'_1 \cos a'_2 \cos(A_2 - A_1) \quad \Longrightarrow \quad \theta' \approx 8.02°$$

$$\frac{\theta'}{\theta} \approx 0.59$$

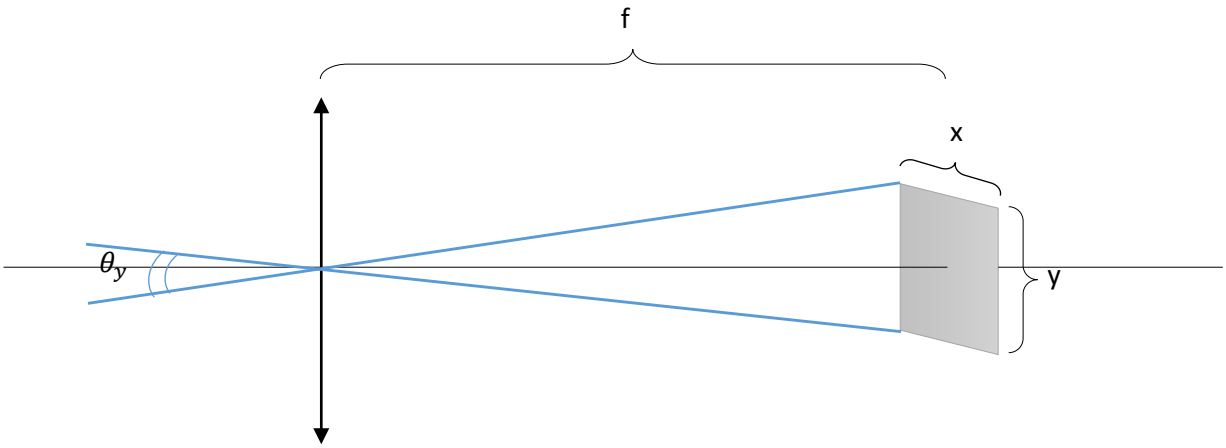
سوال 14) گزینه " الف "پاسخ صحیح است .

از آن‌جا که ناظر هر دو ستاره را پشت تلسکوپ دیده‌است، بنابراین کافی است تنها از رابطه‌ی معمول تبدیل قدر استفاده کنیم. ملاک گزارش قدر ستارگان نیز قدری است که با چشم می‌بینیم.

$$m - 0 = -2.5\log\frac{1}{5} = 1.75$$

سوال 15) گزینه "د" پاسخ صحیح است .

در این جا عامل محدود کننده میدان دید ، ابعاد ccd است.با توجه به شکل زیر ،زاویه میدان دید عمودی برابر است با :



$$\frac{\theta_y}{2} \approx \tan\frac{\theta_y}{2} = \frac{\frac{y}{2}}{f} \rightarrow \theta_y = \frac{y}{f}$$

به همین ترتیب برای زاویه افقی :

$$\theta_x \approx \frac{x}{f}$$

چون زوایا کوچک هستند ،مساحت میدان دید را میتوان با ضرب این زوایا برابر گرفت و احتیاجی به هندسه کروی نیست :

$$s \approx \theta_x\theta_y = \frac{xy}{f^2} = \frac{400 \times (0.5 \times 10^{-6}) \times 600 \times (0.5 \times 10^{-6})}{1.5^2}\ (rad^2)$$

$$\rightarrow s \approx 1134\,\text{arcsec}^2$$

که به گزینه "د" نزدیک تر است .

سوال 16) گزینه " الف " پاسخ صحیح است .

ابتدا مشخصات مدار را به دست می‌آوریم. M و Rجرم و شعاع زمین و m جرم ماهواره است .

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_e}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{GMm}{R} \quad و \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \rightarrow$$

$$E = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R} \rightarrow a = R$$

حال چون به رابطه بالا رسیدیم یعنی الف و ب روی دو سر نیم قطر کوچک بیضی هستند. پس :

$$d = 2b \implies b = \frac{d}{2} = R\sin\frac{\theta}{2}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{R^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{R^2}} = \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\lambda_2 - \lambda_1)}{2}} \approx 0.87$$

سوال 17) گزینه " ب" پاسخ صحیح است .

با صرف نظر از اختلاف نقطه‌ی صفر قدر بولومتریک و مرئی، رابطه‌ی تبدیل قدر را به صورت زیر نوشته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

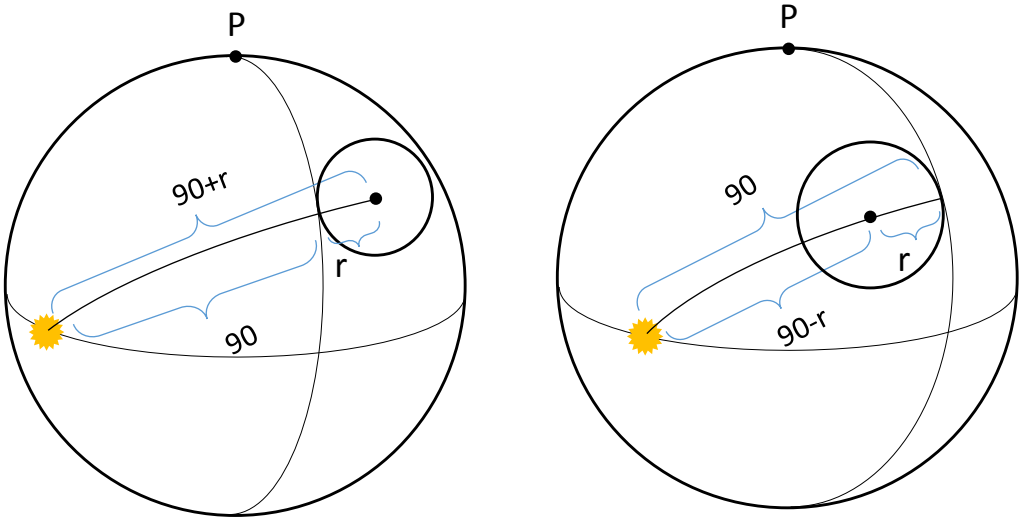
$$BC = m_{bol} - V = -2.5\log\frac{I_{bol}}{I_V} = \frac{\frac{\sigma T^4}{\pi}}{B_V\Delta\lambda} \quad ; \quad B = \text{تابع پلانک} .$$

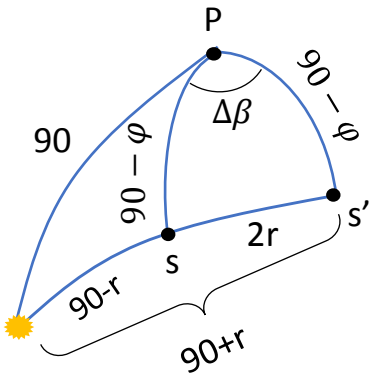
از طریق استدلال نیز می‌توان دمای مؤثّری را برگزید که بیشینه‌ی تابشش در ناحیه‌ی مرئی است.(منبع سوال جناب آقای نیما چرتاب سلطانی است)

میتوانید استدلال های مشابهی انجام داده و بدون محاسبه از روی گزینه ها به جواب مورد نظر برسید .

سوال 18) گزینه " ب " پاسخ صحیح است .

هنگامی خورشید برای اولین ناظر غروب میکند که ناظر روی دایره عظیمه ای به قطب خورشید قرار گیرد یعنی شهر و دایره عظیمه خورشید بر هم مماس شوند .آخرین شهر ، هنگامی غروب خورشید را میبیند که شهر از بیرون به دایره عظیمه به قطب خورشید مماس شود .





$$r = \frac{3350}{6378} \rightarrow r = 30° , \varphi = 45°$$

با نوشتن فرمول کسینوس ها در مثلث pss' داریم :

$$\cos 2r = \cos^2 \varphi \cos \Delta\beta + \sin^2 \varphi$$

$$\rightarrow \Delta\beta = 90° \rightarrow \Delta t = 6^h$$

سوال 19) گزینه " ج " پاسخ صحیح است .

برای محاسبه تغییر طول موج نور هنگام عبور از کنار سیاهچاله ، با توجه به رابطه قرمز گرایی گرانشی داریم :

$$\frac{\nu_\infty}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \rightarrow \frac{hc/\lambda_\infty}{hc/\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_\infty} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \rightarrow \frac{\lambda_\infty}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}}$$

$$\approx 1.00159$$

اما با توجه به رابطه بین سرعت نور و طول موج :

$$v = \lambda \,.\nu \rightarrow c = \lambda_0 . \nu_0 \rightarrow \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 \,.\nu_0}{\lambda \,.\nu}$$

که در رابه فوق λ_0 همان λ_∞ است .

چون دوره تناوب نور در محیط های مختلف تغییر نمیکند در نتیجه فرکانس آن در محیط های مختل یکسان است .پس داریم :

$$\frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \rightarrow n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 1.00159 \approx 1.0016$$

سوال 20) گزینه " ج " پاسخ صحیح است .

جسم دارای سرعت V است و در ابتدا در حضیض خود قرار دارد و بعد از جابه‌جایی جسم به اندازه‌ی اوج مدار از خورشید فاصله می‌گیرد.با توجه به معادلات انرژی داریم:

معادله‌ی اول:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{a(1-e)} = -\frac{GM}{2a}$$

معادله‌ی دوم:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{a(1+e)} = 0$$

حال با توجه به معادلات بالا:

$$\frac{GM}{a(1+e)} = \frac{GM}{a(1-e)} - \frac{GM}{2a}$$

$$\frac{1}{(1+e)} = \frac{1}{(1-e)} - \frac{1}{2}$$

که به معادله‌ی درجه دو ی زیر ختم میشود:

$$e^2 + 4e - 1 = 0$$

که ریشه‌ی مثبت ان برابر 0.24 است .

سوال 21)گزینه "ج" پاسخ صحیح است .

با کمی دقت ،درمی یابیم که این مقر سه درجه آزادی دارد .اما مقر های امروزی تنها از دو درجه آزادی برخوردارند .بنابر این با حذف کردن یکی از درجات آزادی ،میتوان این مقر را به مقر های امروزی تبدیل کرد .

اگر a و b را روی دایره ثابت محکم کنیم ،به طوری که ab عمود بر سطح زمین باشد ؛ مقر سمتی – ارتفاعی بدست می آید .چرخش دایره متحرک حول ab سمت های مختلف و چرخش لوله تلسکوپ روی دایره متحرک ارتفاع های مختلف را برای نشانه روی فراهم میکند .

به همین ترتیب برای بدست آوردن مقر استوایی باید b و a را به گونه ای محکم کنیم که ab به ستاره قطبی اشاره کند (به این منظور،دایره ثابت هم حتماً باید در امتداد شمال جنوب باشد .)

سوال 22) گزینه " الف " پاسخ صحیح است .

یکی از مسیرها دایره صغیره و دیگری دایره عظیمه است.

طول دایره صغیره عبارت است از:

$$10° \times \frac{\pi}{180} \times Sin50° \times 6380km = 853km$$

طول دایره عظیمه عبارت است از:

$$\cos^{-1}((\cos 50)^2 + (\sin 50)^2 \cos 10) \times \frac{\pi}{180} \times 6380km = 852.55$$

پس اختلاف مسیرها حدود 0.45 کیلومتر است

سوال 23) گزینه " د " پاسخ صحیح است .

میتوان از شکل به این نتیجه رسید که قدر مطلق ستاره ای با چنین ویژگی باید برابر 5+ باشد و با توجه به رابطه‌ی قدر و فاصله داریم:

$$m - M = 5\log(d) - 5$$

$$\frac{20 - 5 + 5}{5} = \log(d)$$

$$d = 10000pc$$

سوال 24) گزینه " ج " پاسخ صحیح است .

شمع استاندارد عبارت است از جرمی که طبق خصوصیات اخترفیزیکی‌اش، درخشندگی آن برای ما معلوم است. حال آن که برای فلش هلیوم، هنوز مدل خوبی برای تعیین درخشندگی ارائه نشده‌است. توجّه شود که شمع استانداردی بهتر است که در آن تا حدّ امکان از کمترین مدل‌های اخترفیزیکی استفاده شده باشد .

سوال 25) گزینه " ج " پاسخ صحیح است .

دمای موثر ، دمایی است که از روی قانون استفان بولتزمن بدست می آید ، برای محاسبه این دما باید مساحت زیر نمودار را حساب میکردیم . این مساحت برابر شدت کل است :

$$S = I_{tot} = \frac{\sigma T_{eff}^4}{\pi}$$

دمای وین نیز دمایی است که از قانون وین محاسبه میشود :

$$T_v = \frac{.0029}{\lambda_{max}}$$

با محاسبه این دو کمیت ، متوجه میشویم که پاسخ درست گزینه " ج " است .

سوال 26) گزینه " ب " پاسخ صحیح است .

ناظر زمینی ، فرض میکند که زمین ثابت است و فوتون های خورشید با زاویه θ به زمین برخورد میکنند :

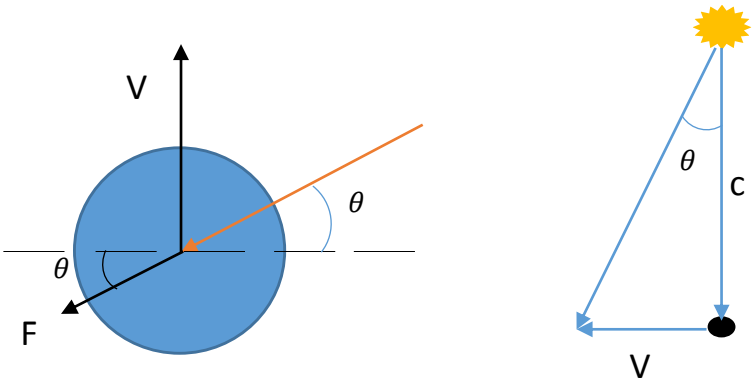
$$\tan\theta = \frac{v}{c} \approx \theta$$

با توجه به رابطه نیروی تابشی داریم :

$$F_{rad} = \frac{b\,A}{c}$$

پس نیروی تابشی در راستای سرعت زمین خواهد شد :

$$F_{rad,v} = \frac{b\,A}{c}\sin\theta \approx \frac{bA}{c}\,\theta \approx \frac{bA}{c}\frac{v}{c} = \frac{bAv}{c^2} \rightarrow F_{rad,v} = 60000\ N$$

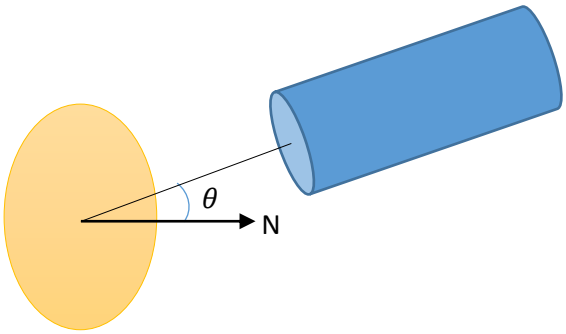


سوال 27) گزینه " الف" پاسخ صحیح است .

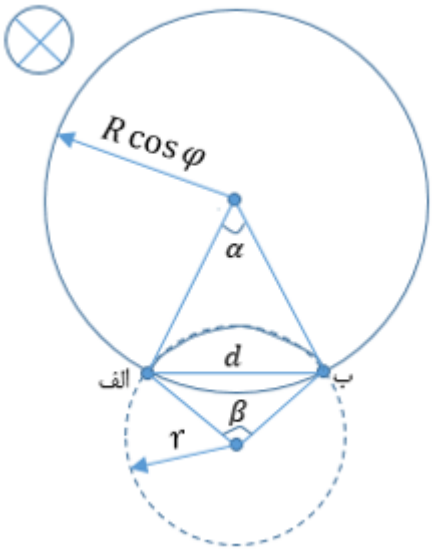
روشنایی جسم گسترده از پشت تلسکوپ تغییر نمیکند حال اگر تعریف شدت را به صورت زیر ارائه دهیم :

$$I = \frac{dE}{d\lambda dt dA \cos\theta \, d\Omega}$$

متوجه خواهیم شد که شدت نیز نباید از پشت تلسکوپ تغییر کند چون تنها آن بخش از انرژی که عکود بر سطح تلسکوپ است وارد تلسکوپ میشود ، پس انرژی ورودی باید در $\cos\theta$ ضرب شود که چون در تعریف شدت در مخرج هم $\cos\theta$ داریم . این دو یکدیگر را خنثی میکنند .



سوال 28) گزینه " ج " پاسخ صحیح است .



به شکل که دید از بالای زمین (قطب شمال) و مدار ϕ درجه است دقت کنید. در آن جهت میدان مشخص است.

$$F = \frac{mv^2}{r} = qvB \implies r = \frac{mv}{qB}$$

$$\frac{d}{2} = R\cos\varphi \sin\frac{\alpha}{2} = R\cos\varphi \sin\frac{\Delta\lambda}{2} = r\sin\frac{\beta}{2} \rightarrow \beta = 2\sin^{-1}\left(\frac{R\cos\varphi}{\frac{mv}{qB}}\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\right)$$

زمان سفر میشود:

$$t = \frac{r\beta(rad)}{v} = \frac{m}{qB}\beta(rad) \approx 33.36 \text{ دقیقه}$$

توجه کنید که در صورت سوال به اشتباه ذکر شده بود که سرعت به سطح زمین عمود است .

سوال 29) گزینه "ب" پاسخ صحیح است.

$$\theta_{hubble} = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\frac{550 \times 10^{-9}}{2.4} = 2.8 \times 10^{-7}\ (rad) = .06"$$

در اولین لحظه تقکیک ،زاویه بین دو کهکشان از دید ماباید با توان تفکیک تلسکوپ برابر باشد .سرعت شعاعی کهکشان a ،باعث قرمز گرایی میشود .

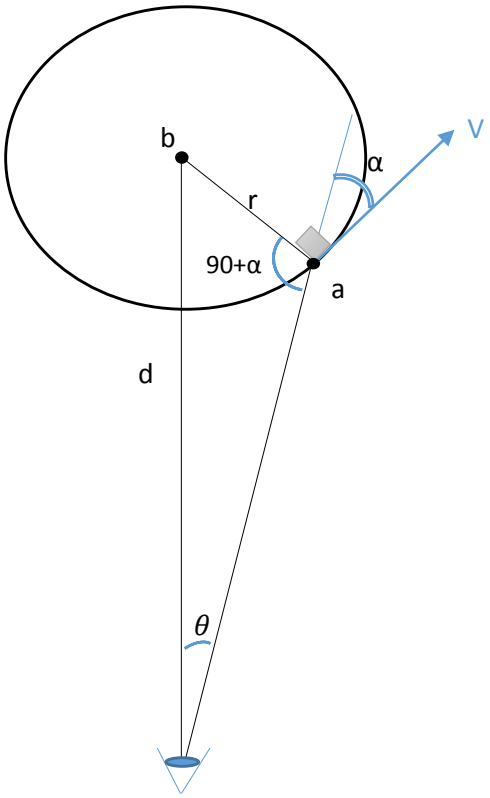
$$z = \frac{v_r}{c} = \frac{v\cos\alpha}{c}$$

$$\frac{r}{\sin\theta} = \frac{d}{\sin(90+\alpha)} \rightarrow \cos\alpha = \frac{d}{r}\sin\theta$$

برای محاسبه v لازم است جرم کهکشان b را تخمین بزنیم .یک کهکشان به طور میانگین 10^{11} ستاره دارد . اگر همه آنها را خورشید گون بگیریم :

$$M \approx 10^{11} m_{sun} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 2 \times 10^{6}\frac{m}{s}$$

$$\rightarrow z = \frac{d}{r}\sin\theta\,.\,v = 1.5 \times 10^{-8}$$



سوال 30) گزینه " ج " پاسخ صحیح است .

هدف از این سوال ، بررسی اثر جذب بر قدر ستاره بوده است :

$$m_z = m_0 + k \sec z$$

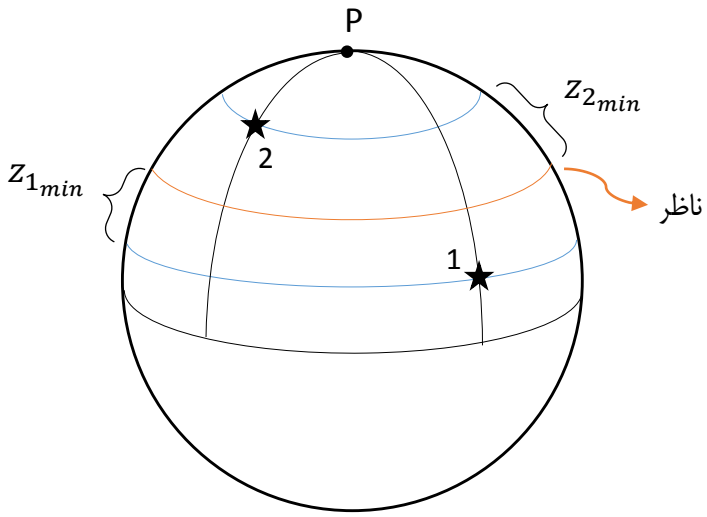
$$\mathrm{m_{0,i}} - M_i = 5 \log \frac{d}{10} \rightarrow m_{0,1} = m_{0,2} = 9.5$$

$$\rightarrow m_{z1} - 9.5 = k \sec z_1 \ , \quad m_{z2} - 9.5 = k \sec z_2$$

پس داریم :

$$\frac{m_{z1} - 9.5}{m_{z2} - 9.5} = \frac{\sec z_1}{\sec z_2}$$

در نقطه ای که قدر مینیمم است ، با توجه به شکل داریم :



$$\frac{m_{z1} - 9.5}{m_{z2} - 9.5} = \frac{\sec z_{1min}}{\sec z_{2min}} = \frac{\cos(\delta_2 - \phi)}{\cos(\phi - \delta_1)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{m_{z1} - 9.5}{m_{z2} - 9.5} = \dfrac{0.305}{0.32} \rightarrow \phi = 25^\circ \\ \dfrac{m_{z1} - 9.5}{m_{z2} - 9.5} = \dfrac{0.32}{0.305} \rightarrow \phi = 35^\circ \end{cases}$$

که با توجه به گزینه ها ، گزینه ج پاسخ صحیح است .

سوال 31) گزینه " ج " پاسخ صحیح است .

هنگامی که اکسیژن کاملا یونیزه داریم ، به ازای هرهسته اکسیژن 8 الکترون آزاد داریم .که این الکترون های آزاد در جرم کل نقشی ندارند ولی در تعداد کل نقش ایفا میکنند .

$$\overline{m} = \frac{\text{جرم کل}}{\text{تعداد کل}} = \frac{N.m_H * 17}{(N + 8N)} = \frac{17}{9}\, m_H = \mu m_H \rightarrow \mu = \frac{17}{9}$$

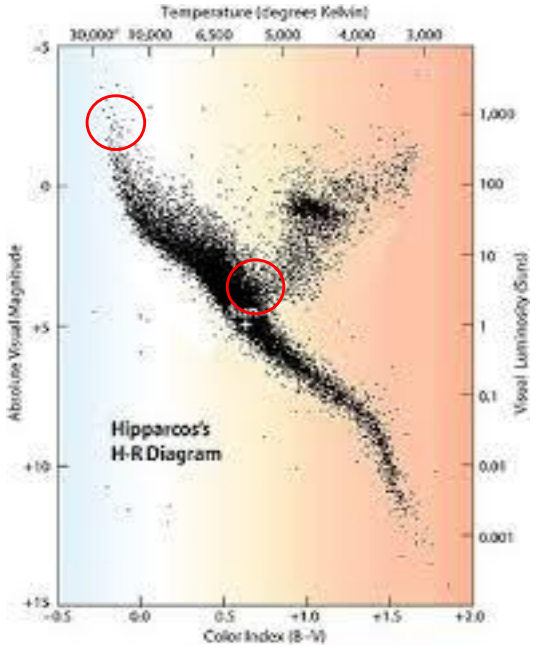
دقت کنید که این راه ، تنها راه ممکن برای رسیدن به جواب نیست و روش های دیگری هم وجود دارد به عنوان نمونه میتوانید به فصل 10کتاب $An\ introduction\ to\ modern\ astrophysics$ مراجعه کنید .یا فصل 3 کتاب $Stellar\ astrophysics$ میتواند مفید باشد .

سوال 32) گزینه "ب" پاسخ صحیح است .

اگر کهکشان فقط یک مرحله ستاره زایی را پشت سر گذاشته بود ،پس از گذشت زمان ،نمودار HR آن همانند شکل زیر میشد .

اما در شکل تهیه شده از کهکشان راه شیری ،ستاره های داغ و جوان B و O در قسمت بالایی رشته اصلی دیده میشوند .این موضوع ، نشان دهنده یک مرحله ستاره زایی دیگر است که عمر ستاره های داغ آن هنوز به پایان نرسیده است .

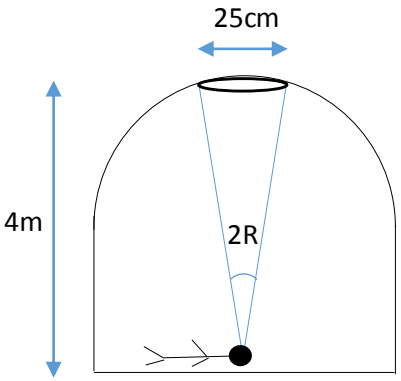
در حالت کلی هر نقطه بازگشت $(turn\ off\ point)$ روی نمودار HR متناظر با یک مرحله ستاره زایی عظیم است .در نمودار داده شده دو نقطه بازگشت دیده میشود ،پس دو مرحله ستاره زایی در کهکشان داشته ایم .



سوال 33) گزینه " ج " پاسخ صحیح است .

میدانیم به خاطر این که مرز بین تاریکی و روشنایی روی ماه دایره است هنگامی که ما به ماه کج نگاه میکنیم باید مرز بین تاریکی و روشنایی را بیضی ببینیم. پس شکلی را باید انتخاب کنیم که این مرز دقیقاً یک نیم بیضی باشد و شیب در نقطه بالای خط مرز صفر شود.

سوال 34) گزینه "ب" پاسخ صحیح است .

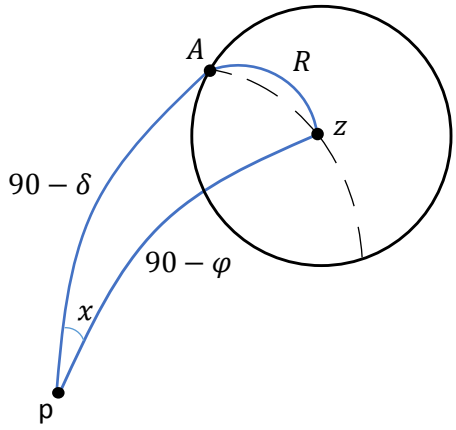


$$\tan R = \frac{\frac{0.25}{2}}{4} \rightarrow R = 1.8\,^{\circ}$$

چون ستاره از سرسو میگذرد پس داریم :

$$\delta = \phi$$

دایره شکل زیر رو تصویر سوراخ گنبد روی کره سماوی است .نقطه چین در شکل دایره صغیره حرکت ستاره را نشان میدهد .از نقطه A به p و z وصل میکنیم . از مثلث حاصل داریم :



$$\cos R = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos x$$

$$\rightarrow \frac{t}{24^h} = \frac{2x}{360} \rightarrow t = 17^m\ 7^s$$

سوال 35) گزینه "ج "پاسخ صحیح است .

ابتدا با استفاده از تحلیل ابعادی ، رابطه ای برای زمان پلانک بر حسب $\hbar\ ,G\ ,c$ پیدا میکنیم .

بعد هر یک از کمیت های بالا برابر است با :

$$[c] = \frac{m}{s}\ ,[G] = \frac{m^3}{kg\ .s^2}\ ,[\hbar] = J.s = \frac{kg\ m^2}{s}$$

پس برای زمان پلانک داریم :

$$t_p = c^a G^b \hbar^c \rightarrow s = \left(\frac{m}{s}\right)^a \left(\frac{m^3}{kg\ .s^2}\right)^b \left(\frac{kg\ m^2}{s}\right)^C$$

$$\rightarrow s = m^{a+3b+2c} s^{-a-2b-c} kg^{-b+c}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -b + c = 0 \rightarrow b = c \\ a + 3b + 2c = 0 \rightarrow a + 3b + 2b = 0 \rightarrow a = -5b \\ -a - 2b - c = 1 \rightarrow 5b - 2b - b = 1 \rightarrow b = c = \frac{1}{2}, a = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

در نتیجه داریم :

$$t_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \approx 5.38 \times 10^{-44}$$

بنا بر این برای عمر کیهان داریم :

$$t_0 = 13.7\ Gyr \rightarrow t_0 = 4.32 \times 10^{17}$$

$$\rightarrow \frac{t_0}{t_p} = 8.036 \times 10^{60} \approx 10\text{^}61$$

که نزدیک ترین گزینه به آن ، گزینه " ج " است .

باسمه تعالی	کلید تصحیح
شماره‌ی سؤال	گزینه‌ی درست
۱	۱ یا ۲
۲	٤
۳	۲
٤	۱
٥	۱
٦	۲
۷	۱
۸	۱
۹	٤
۱۰	٤
۱۱	۲
۱۲	۱
۱۳	٤
۱٤	۱
۱٥	٤
۱٦	۱
۱۷	۲
۱۸	۲
۱۹	۳
۲۰	۳
۲۱	۳
۲۲	۱
۲۳	٤
۲٤	۳
۲٥	۳
۲٦	۲
۲۷	۱
۲۸	حذف
۲۹	۲
۳۰	۳
۳۱	۳
۳۲	۲
۳۳	۳
۳٤	۲
۳٥	۳