به نام خداوند بخشنده‌ی مهربان

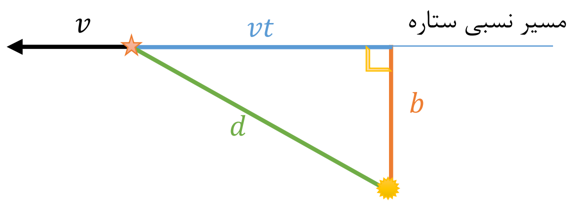
پاسخ نامه دومین آزمون آزمایشی مرحله اول المپیاد نجوم و اخترفیزیک

تهیه و تنظیم : اعضای تیم نهمین المپیاد جهانی نجوم و اخترفیزیک

توضیحات : این راه‌حل‌ها تنها راه‌حل‌های ممکن برای سوالات نیستند و ممکن است چند راه حل برای یک سوال وجود داشته باشد .

سوال 1) گزینه ″ ج ″ پاسخ صحیح است.

چون بردار سرعت نسبی ستاره تغییری نمی‌کند، می‌توان مسیر کلی آن را مانند شکل زیر در نظر گرفت. برای سادگی محاسبات مبدا زمان را هنگامی اختیار می‌کنیم که ستاره به کمترین فاصله از خورشید می‌رسد. در شکل، کمترین فاصله‌ی ستاره از خورشید را با b نشان داده‌ایم. به کمک رابطه‌ی فیثاغورس فاصله‌ی d را برحسب b، اندازه‌ی سرعت نسبی ستاره و زمان می‌نویسیم:



$$d^2 = b^2 + (vt)^2$$

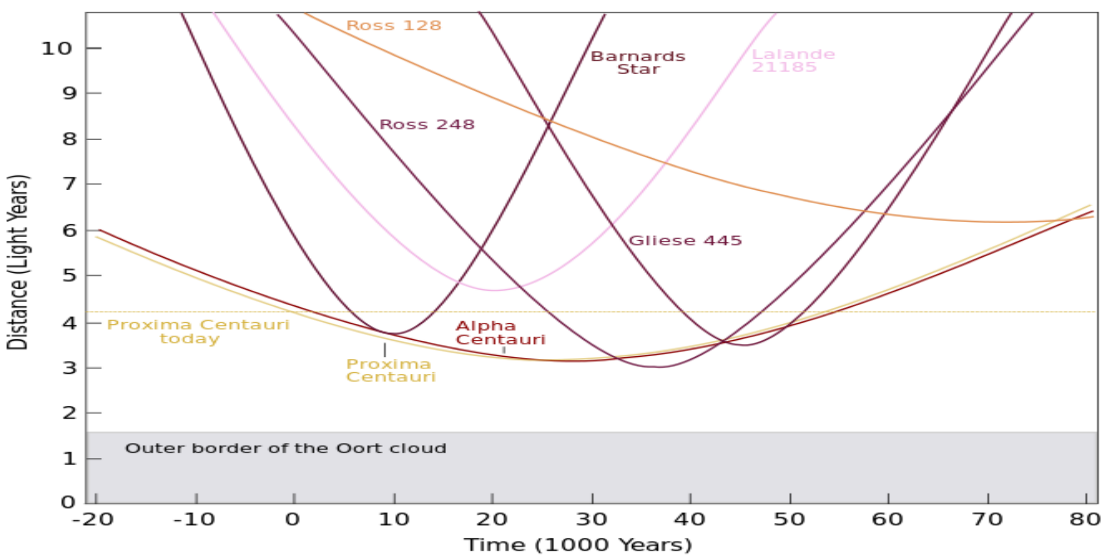
پس از مرتب کردن رابطه به فرم کلی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2}{b^2} - \frac{t^2}{\left(\frac{b}{v}\right)^2} = 1$$

واضح است که این معادله‌ی دکارتی هذلولی است. در واقع نمودار فاصله زمان ستاره همواره بخشی از یک خم هذلولی‌وار است.

لازم به ذکر است که ما در این‌جا، مانند روش متداول علمی، فاصله‌ی ستاره را از مرکز خورشید می‌سنجیم و از تاثیرات حرکت انتقالی زمین صرف نظر می‌کنیم.

برای درک بهتر این مسئله به تصویر زیر که نمودار فاصله-زمان چند ستاره‌ی نزدیک را نشان می‌دهد توجه کنید.



سوال 2) گزینه ″ الف ″ پاسخ صحیح است.

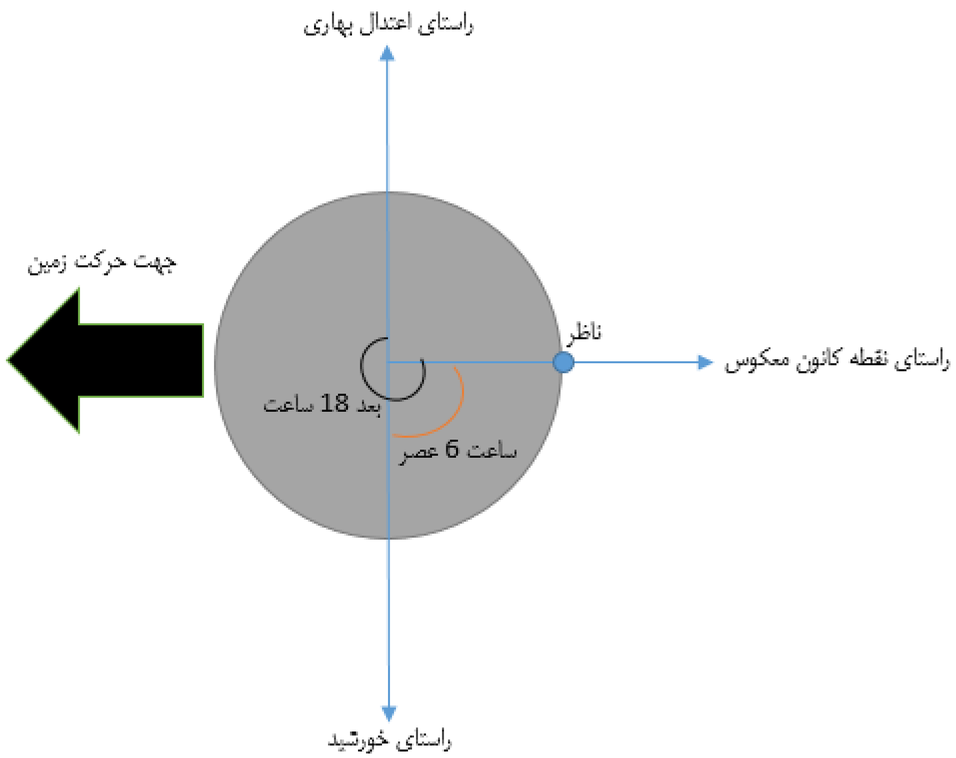
می‌دانیم که نسبت سیگنال به نویز با نسبت فوتون‌های آشکار شده رابطه مستقیم دارد. پس اگر نسبت فوتون‌های آشکار شده را افزایش دهیم، می‌توانیم نسبت سیگنال به نویز را افزایش داده و به هدف مورد نظر برسیم. با توجه به اینکه افزایش قطر دهانه، انرژی رسیده به تلسکوپ را افزایش می‌دهد، در نتیجه با این کار تعداد فوتون‌های رسیده به CCD افزایش یافته و نسبت سیگنال به نویز ارتقاء پیدا می‌کند.

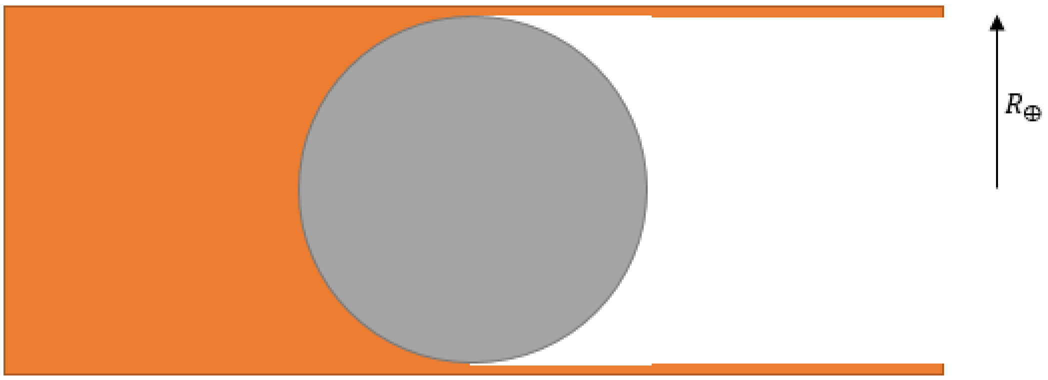
بررسی سایر گزینه ها :

گزینه ″ب″ به این دلیل نادرست است که: اگرچه کاهش دمای رصدخانه می‌تواند نویز ناشی از تابش گرمایی اطراف تلسکوپ را کاهش دهد اما این کار به دو دلیل موثرتر از افزایش قطر دهانه نیست. اول اینکه CCD در مجاورت هلیوم مایع نگه‌داری می‌شود و دمای آن نسبت به دمای رصدخانه بسیار پایین تر است؛ پس کاهش دمای رصدخانه اثر چندانی بر نحوه عملکرد CCD ندارد. دوم اینکه اثر نویز ناشی از تابش گرمایی و تابش پس زمینه کیهانی را با تقریب خوبی میتوان بوسیله گرفتن تصاویر $BIAS$ و $FLAT$ از تصویر اصلی حذف کرد. گزینه ″ج″ به این دلیل نادرست است که: استفاده از تیغه ربع موج، تنها می‌تواند بین موج‌های ورودی اختلاف فاز ایجاد کند و اثری بر نسبت سیگنال به نویز ندارد. گزینه ″د″ به این دلیل نادرست است که: تابش پس زمینه کیهانی، عموما در طول موج فروسرخ حضور دارد و رصد در این طول موج به شدت مقدار نویز تصاویر گرفته شده را افزایش می‌دهد.

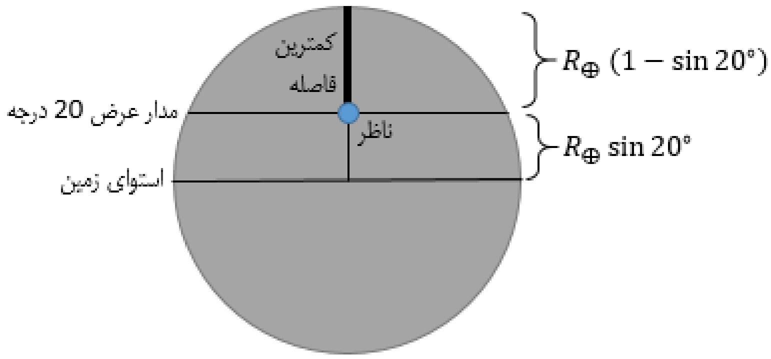
سوال 3) گزینه ″ د ″ پاسخ صحیح است .

در شکل زیر نمای کلی سؤال نمایش داده شده است. می‌دانیم جهت چرخش زمین به دور خود پادساعتگرد است. با توجه به اعداد سؤال کانون معکوس دقیقاً روی نصف‌النهار ناظر می‌افتد. حال چون شهاب‌ها به سمت نقطه کانون معکوس در حرکت‌اند، همانند این است که زمین در خلاف جهت نقطه کانون معکوس حرکت می‌کند. جهت حرکت زمین نیز روی شکل نشان داده شده است.





در ضمن اینکه زمین در مدار خود حرکت می‌کند، ناگاه به یک توده‌ای از سنگ بر خورد می‌کند که در شکل بالا در سمت چپ زمین و به رنگ نارنجی نشان داده شده است. بعد از این که توده سنگ‌ها از زمین عبور می‌کنند، در آن طرف به شکل یک استوانه‌ی توخالی به شعاع زمین بیرون می‌آیند و با توجه به داده‌های سؤال، ناظر نیز در آن طرف کره (سمت راست) حضور دارد. بنابراین اگر در راستای محور استوانه به زمین نگاه کنیم، شکلی همانند زیر می‌بینیم .



بنابر شکل، کمترین فاصله می‌شود:

$$R_e\ (1-\sin 20°) \approx 4198\ km$$

سوال 4) گزینه ″ د ″ پاسخ صحیح است.

با توجه به این که تابش کهکشانی در همه جهات و به طور متقارن انجام می‌شود، نیروی تابشی ناشی از آن نمی‌تواند هیچ گشتاور نیرویی به کهکشان وارد کند و تنها اثر آن کاهش انرژی کهکشان است. پس این مورد نمی‌تواند تکانه زاویه‌ای کهکشان را کاهش دهد.

سوال 5) گزینه ″ ج ″ پاسخ صحیح است .

اثر گرانشی ستارگان کهکشان راه شیری بر LMC موجب از دست رفتن تکانه‌ی زاویه‌ای آن حول مرکز راه شیری می‌شود و در نتیجه این کهکشان کوتوله تدریجاً درون راه شیری سقوط خواهد کرد. شایان ذکر است گزینه‌های 2 و 4 نیز با توجّه به شناخت ما از مدل‌های تحوّلی کهکشان‌ها نمی‌توانند درست باشند.

سوال 6) گزینه ″ ب ″ پاسخ صحیح است.

روش تعیین مکان یک نقطه این است که هر ماهواره یک پالس فرستاده و از روی زمان رفت و برگشت پالس، فاصله را تخمین می‌زند. پس مکان هندسی نقاطی که هر ماهواره از روی زمان رفت و برگشت پالس ها، فاصله‌ی آن را اندازه می‌گیرد یک کره به مرکزیت ماهواره خواهد بود. حال اگر دو ماهواره با هم یک مکان را بررسی کنند، مکان هندسی نقاطی که از دو ناظر فاصله مشترک دارند سطح مقطع دو کره یا یک دایره خواهد بود. اگر سه ماهواره را بررسی کنیم، مکان هندسی نقاط فوق، دو نقطه با فاصله مشخص از سه ناظر خواهد شد. حال اگر سطح مقطع 4 کره را بررسی کنیم (4 ماهواره) دقیقا به یک نقطه یکتا خواهیم

رسید. حال چون در این سوال، قصد بررسی سطح زمین را داریم، یکی از کره‌ها خود زمین است؛ پس حداقل به سه ماهواره برای تعیین نقاط روی سطح زمین نیاز داریم. بیشینه تعداد ماهواره ها نیز برای بررسی جزئیات بیشتر و تعیین کل سطح زمین نامحدود خواهد بود.

سوال7) گزینه ″ الف ″ پاسخ صحیح است .

اگر بخواهیم زمین در مداری مثل مدار قبلی‌حرکت کند با توجه به این‌که جرم زمین تغییر نکرده است، به عنوان یک فرض ساده‌کننده، می‌توانیم از تغییر سرعت زمین در لحظه تعویض صرف نظر کنیم. و نیز می-دانیم ویژگی‌های هندسی حرکت یک جسم (مثل شکل مدار)، توسط شتاب جسم به طور یکتا مشخص می-شود. پس باید نیروی بین زمین و خورشید، در حالت گرانشی با حالت الکترواستاتیکی یکی باشد. ابتدا بار زمین را حساب می‌کنیم:

$$m_{Si} \approx 28 \times 1.67 \times 10^{-27} kg = 4.676 \times 10^{-26} kg$$

$$N_{Si} \approx \frac{5.97 \times 10^{24}}{4.676 \times 10^{-26}} \approx 1.277 \times 10^{50}$$

$$Q_e = 1.277 \times 10^{50} \times 14 \times 1.6 \times 10^{-19}\ C \approx +2.860 \times 10^{32} C$$

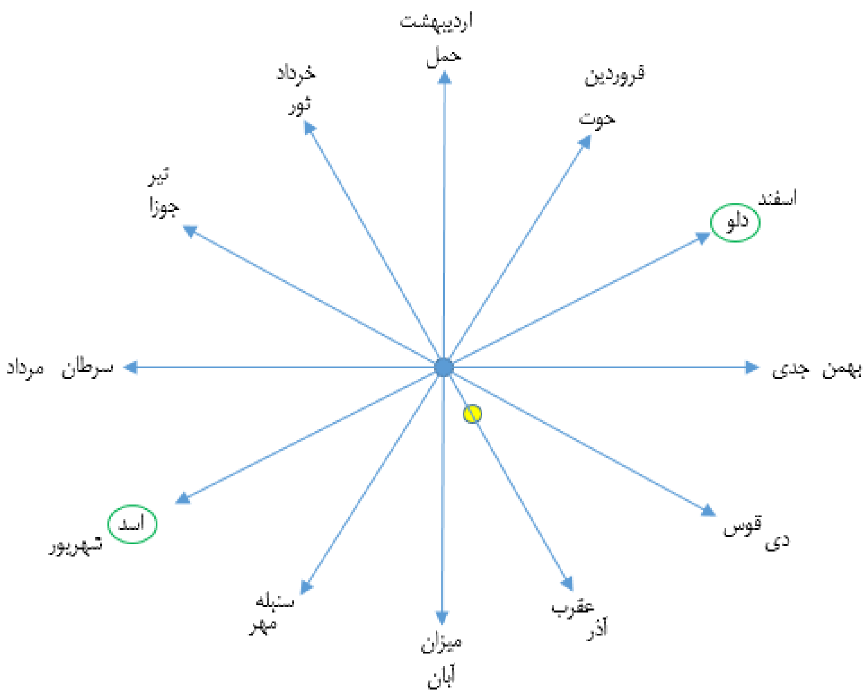
با توجه به توضیحات بالا :

$$-\frac{GM_{sun}M_e}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{sun}Q_e}{r^2} \ \rightarrow\ Q_{sun} \approx -308\ C$$

سوال 8) گزینه ″ د ″ پاسخ صحیح است .

به شکل زیر که صورت فلکی های دایره‌البروجی را نشان می‌دهد و زمین مرکز آن است توجه کنید.

در این شکل زمین به رنگ آبی و خورشید به رنگ زرد مشخص شده است. چون که نقطه اعتدال بهاری در صورت فلکی حوت است، بنابر این ماه فروردین مربوط به صورت فلکی حوت می شود و با توجه به حرکت خورشید، در ماه آذر خورشید در صورت فلکی عقرب است و از دید دو صورت فلکی دلو و اسد، زمین و خورشید در تربیع دیده می‌شوند.



سوال 9) گزینه ″ د ″ پاسخ صحیح است .

تعداد کل ستاره‌های آسمان را داریم. اگر همه‌ی آنها را خورشیدگون بگیریم می‌توانیم قدرمطلق سطحی آسمان را حساب کنیم. سپس با استفاده از رابطه‌ی مدول فاصله، شعاع فلک‌الافلاک به راحتی بدست می‌آید.

$$L_{tot} = 10^{15} L_{sun}$$

$$L_{surf} = \frac{L_{tot}}{4\pi\ (sr)} \times \frac{1\ (sr)}{206265^2\ ('''^2)} = 1870\ L_{sun}\ (\frac{watt}{''^2})$$

$$M = M_{sun} - 2.5 \log \frac{L_{surf}}{L_{sun}} = -3.46\ \frac{mag}{''^2}$$

$$m - M = 5 \log d - 5 \quad \Rightarrow \quad d = 1.23\ Mpc$$

اگر بجای تبدیل درخشندگی به قدرمطلق سطحی، قدرسطحی را به شار تبدیل می‌کردیم هم به نتیجه‌ی مشابهی می‌رسیدیم.

سوال 10) گزینه ″ الف ″ پاسخ صحیح است .

ابتدا تعداد فوتون‌هایی که در مدت مذکور از ستاره‌ی موردنظر به آشکارساز رسیده‌اند را حساب می‌کنیم.

$$F = F_{sun} \times 10^{\frac{m-m_{sun}}{-2.5}} = 2.84 \times 10^{-18}\ \frac{W}{m^2}$$

$$E_{tot} = F \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \times t = 6.44 \times 10^{-14}\, J$$

$$E_{photon} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{8}}{550 \times 10^{-9}} = 3.62 \times 10^{-19}$$

$$n = \frac{E_{tot}}{E_{photon}} = 178000$$

اما از این تعداد آشکارساز فقط نصف آنها را آشکار می‌کند. بنابراین نسبت سیگنال به نویز برابر می‌شود با:

$$\frac{S}{N} = \frac{0.5 \times n}{\sqrt{0.5 \times n}} = 298$$

که به گزینه‌ی الف از همه نزدیک‌تر است.

سوال 11) گزینه ″ الف ″ پاسخ صحیح است .

ابتدا سرعت باد خورشیدی در نزدیکی زمین را حساب می‌کنیم. ذره‌ای از باد به جرم m را در نظر می‌گیریم و پایستگی انرژی را برای این ذره به کار می‌بریم. (با محاسبه می‌توانید به این نتیجه برسید که اثر گرانش زمین در مقایسه با بقیه جملات قابل صرف نظر کردن است.) :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{G M_{sun} m}{r} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_{sun} m}{R_{sun}}$$

که در آن r فاصله زمین و خورشید است. پس داریم :

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2 G M_{sun} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_{sun}}\right)} \approx 332.194\ \frac{km}{s}$$

برای نیروی وارد بر زمین داریم:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = v \frac{dm}{dt}$$

$\frac{dm}{dt}$ نرخ فرود آمدن جرم روی زمین است و اگر $\frac{dM_{sun}}{dt}$ نرخ از دست دادن جرم از خورشید باشد داریم:

$$\frac{dm}{dt} = \left|\frac{dM_{sun}}{dt}\right| \times \frac{\pi R_e^2}{4 \pi r^2} \rightarrow\ F \approx 9.481 \times 10^{13} N$$

سوال 12) گزینه ″ د ″ پاسخ صحیح است .

خورشید هم‌اکنون در صورت فلکی جدی قرار دارد. باید ببینیم پس از گذشت 8400 سال، مکان صورت فلکی‌های دایره‌البروجی چه قدر جابه‌جا می‌شود و سپس با تخمین، مکان خورشید را محاسبه کنیم. دوره‌ی تناوب حرکت تقدیمی 26000 سال است. بنابراین:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.42 \times 10^{-4}\ yr^{-1} \Rightarrow \Delta\theta = \omega\Delta t = 2.03\ rad = 116.3°$$

در نتیجه دایره‌البروج حدود 116 درجه، در خلاف جهت حرکت خورشید جابه‌جا خواهد شد. خورشید هر ماه حدود $\frac{360°}{12} = 30°$ جابه‌جا می‌شود. همچنین $\frac{116°}{30°} = 3.9$، در نتیجه بایستی به صورت فلکی متعلّق به 4 ماه قبل‌تر برگردیم.

سوال 13) گزینه ″ ج ″ پاسخ صحیح است.

همانطور که احتمالا می دانید(!) نیمه‌ی اول و دوم سال چند روزی با یکدیگر تفاوت دارند که طول دقیق هر نیمه توسط جدول داده شده قابل محاسبه است:

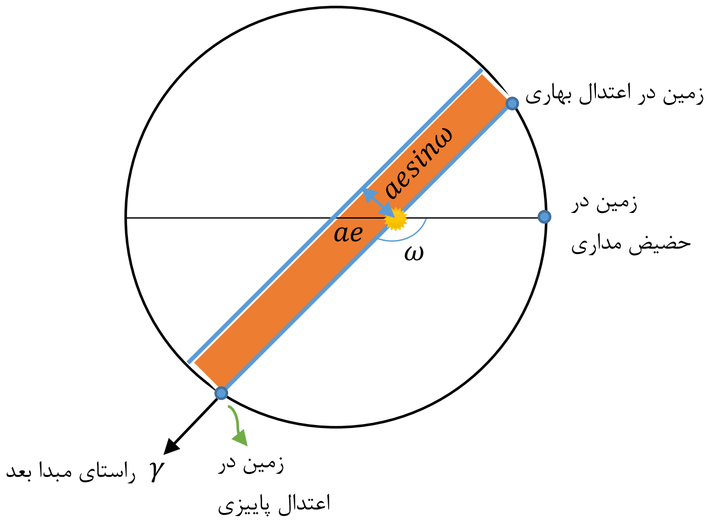
$$t_1 = 186^d\ 9^h\ 32^m$$

$$t_2 = 178^d\ 20^h\ 16^m$$

با توجه به تقریب ذکر شده در سوال، شکل زیر نشانگر میزان تفاوت دو نیمه‌ی سال است. می‌دانیم که حضیض خورشید در اواسط دی‌ماه قرار دارد پس زاویه‌ی بین حضیض زمین و مکان زمین در هنگام اعتدال بهاری باید کمتر از ۹۰ درجه باشد. اما دقت کنید که شناسه‌ی حضیض مطابق تعریف مکمل این زاویه است! چون راستای مبدا بعد، راستایی است که ما وقتی در اعتدال بهاری قرار داریم خورشید را در آن می‌بینیم. (همان‌گونه که در شکل مشخص شده است.)

مساحت مورد تفاوت دو نیمه‌ی سال را که با رنگ نارنجی مشخص شده است، می‌توان با یک مستطیل تقریب زد. به این صورت، طبق قانون دوم کپلر، نسبت طول مدت دو نیمه‌ی سال برابر است با:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{\pi a^2}{2} + S}{\frac{\pi a^2}{2} - S} \quad , \quad S \approx 2a^2 e \sin\omega$$



پس از حل کردن برای $\sin\omega$ داریم:

$$\sin\omega = \frac{\pi}{4e}\frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2} = \frac{\pi}{4}(\frac{\Delta t}{eT})$$

که در اینجا Δt اختلاف مدت دو نیمه‌ی سال و T کل مدت سال است. پس از محاسبه‌ی این دو مقدار داریم:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 7^d\ 13^h\ 16^m$$
$$T = t_1 + t_2 = 365^d\ 5^h\ 48^m$$
$$\sin\omega = 0.972\ \Rightarrow\ \ \omega \approx 103$$

دقت کنید که مقادیر 77 و 103 هر دو در معادله صدق می‌کنند اما همان طور که در بالا توضیح داده شد ما عدد بزرگتر را اختیار می‌کنیم.

سوال 14) گزینه ″ ج ″ پاسخ صحیح است .

می‌دانیم توان تابشی کل کره برابر است با :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

و این توان روی کره ای به شعاع r و مساحت $4\pi r^2$ پخش می‌شود. پس در واقع میزان انرژی عبور کرده از یک سطح بر واحد زمان بر واحد سطح برابر است با :

$$f = \frac{L}{4\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sigma T^4$$

و همچنین میدانیم که رابطه فوق مقدار انرژی‌ای است که در واحد زمان از واحد سطح عبور می‌کند. و میدانیم که انرژی گذرنده از المان سطحی که مقابل کره قرار دارد، تماما از بخشی ساطع شده است که از آن سطح قابل رؤیت است و از آن قسمت کره که از سطح قابل رویت نیست، هیچ پرتویی به ناظر نمی‌رسد. پس از یک طرف می‌دانیم که انرژی f بر واحد زمان از واحد سطح می‌گذرد. از طرف دیگر بر اساس قاعده انتشار نور به خط راست، می‌دانیم این انرژی تماماً از ناحیه قابل رؤیت به سطح رسیده است. در نتیجه :

$$E = fAt = 567\,J$$

سوال 15) گزینه ″ الف ″ پاسخ صحیح است.

ابتدا دمای تعادل مریخ را حساب میکنیم . کل انرژی جذب شده توسط مریخ برابر است با :

$$E_{abs} = \pi R_m^2 \frac{L_{sun}}{4\pi d_m^2}\,(1-\alpha)$$

با فرض تعادل ترمودینامیکی ، مریخ باید کل انرژی جذب شده را تابش کند. چون سرعت چرخش مریخ زیاد است، مریخ این انرژی را در کل فضا تابش خواهد کرد (به جای یک نیم کره) پس داریم :

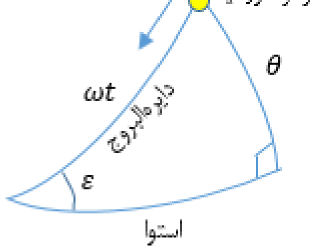
$$E_{rad} = 4\pi R_m^2 T_m^4 = \pi R_m^2 \frac{L_{sun}}{4\pi d_m^2}(1-\alpha) \rightarrow T_m = \left(\frac{L_{sun}(1-\alpha)}{16\pi d_m^2}\right)^{.25} = 3.345$$

حال می‌دانیم برای این که جو اکسیژن را حفظ کند، باید داشته باشیم :

$$v_{esc} = 6 \times v_{rms}(O_2) \rightarrow \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 6\sqrt{\frac{3k_B T_m}{\bar{m}_{o_2}}} \rightarrow M = 8 \times 10^{21}\,kg$$

سوال 16) گزینه ″ الف ″ پاسخ صحیح است.

ابتدا شعاع زاویه‌ای خورشید را حساب می‌کنیم:



$$\theta = \frac{6.96 \times 10^8}{1.5 \times 10^{11}} = 0.00464\,rad \approx 0.266°$$

حال لحظه‌ی شروع غروب ، موقعی است که لبه پایینی خورشید بر افق مماس شود و می‌دانیم در قطب، افق همان استواست. پس لحظه‌ی شروع غروب، موقعی است که میل خورشید (مرکز خورشید) برابر θ شود و

پایان غروب موقعی است که لبه بالایی خورشید بر افق (یا استوا) مماس شود یعنی میل خورشید $-\theta$ شود. باید زمان بین این دو رویداد را حساب کرد. بدیهی است که با در نظر گرفتن دایروی بودن مدار زمین، زمان تغییر میل از θ به صفر برابر است با زمان تغییر میل از صفر به $-\theta$. پس کافی است مدت زمانی که طول می‌کشد تا میل خورشید از θ به صفر برسد را حساب کرده و بعد در دو ضرب کنیم. با توجه به شکل :

$$\sin(\omega t) = \frac{\sin\theta}{\sin\varepsilon} \Longrightarrow t \approx 0.676 \text{ روز}$$

پس مدت زمان تقریبی 1.353 روز طول می‌کشد تا خورشید کامل غروب کند. در این مدت باید ببینیم که جابه‌جایی خورشید در آسمان چقدر است. یک راه سر انگشتی ولی نادقیق این است که بگوییم یک روز طول می‌کشد تا خورشید به جای اول خود برگردد و 0.353 روز باقی مانده معادل است با :

$$0.353 \times 360° \approx 127.1°$$

و چون حرکت خورشید در آسمان پادساعتگرد است، سمت آن $127.1°$ شرقی خواهد شد. ولی قضیه این جاست که چون بعد خورشید هم عوض می‌شود، خوب است ما کارمان را با نقطه‌ای ثابت مثل اعتدال بهاری انجام دهیم به این معنی که بعد از 1.353 روز نقطه اعتدال بهاری در سمت تقریبی $127.1° + \alpha$ شرقی قرار دارد. به این دلیل که موقع شروع غروب، سمت خورشید صفر است ولی سمت اعتدال بهاری صفر نیست و مثبت αاست پس هر زاویه‌ای طی می‌شود باید آن را به اضافه‌ی α کنیم تا به مکان اعتدال بهاری برسیم. اگر α را بیابیم به هدف خود رسیده‌ایم. در همان مثلث بالا کافیست ضلع پایینی را با یک رابطه چهارجزئی بیابیم:

$$0 = \frac{\sin\alpha}{\tan\theta} - \frac{1}{\tan\varepsilon} \Longrightarrow \alpha \approx 0.6°$$

چون در لحظه پایان غروب، خورشید سمت راست نقطه اعتدال بهاری قرار دارد، پس سمت آن برابر است با:

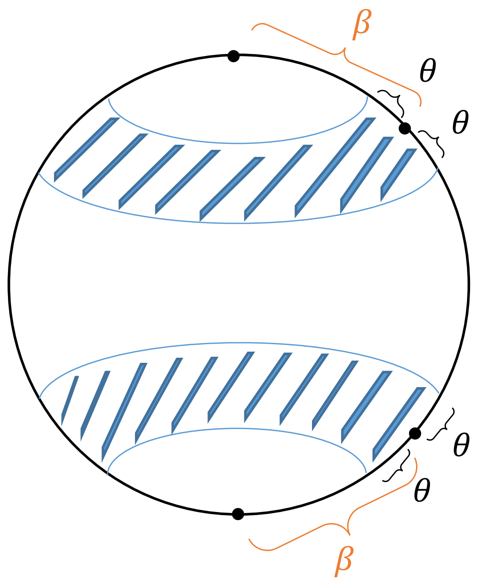
$$A_{sun} = A_{\gamma} + \alpha = 127.1 + 2\alpha \rightarrow A_{sun} \approx 128.3°$$

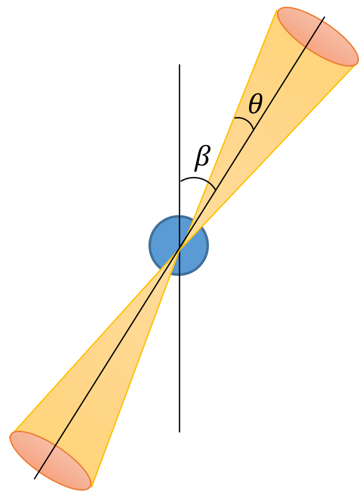
سوال 17) گزینه ″ ج″ پاسخ صحیح است.

ابتدا تعداد AGN ها را در کهکشان راه شیری حساب میکنیم .

$$N_{AGN} = \frac{N_0}{1000} = \frac{10^{11}}{1000} = 10^8$$

میدانیم که AGN ها در دو مخروط تابش خواهند کرد ، بدلیل دوران ستاره ، این دو مخروط دو عرقچین را روی سطح کره تشکیل میدهند که برای آشکار سازی ، راستای دید ناظر باید در این دو ناحیه قرار بگیرد. پس احتمال آشکار سازی یک AGN برابر است با :





$$p = 2 \times \frac{2\pi\{1-\cos(\theta+\beta)\} - 2\pi\{1-\cos(\theta-\beta)\ \}}{4\pi} = 2\sin\beta\sin\theta$$

پس تعداد کل AGN های آشکار شده برابر است با :

$$N = 10^8 \times p = 2 \times 10^8 \times \sin\beta\sin\theta = 2.6 \times 10^7 = 26 \times 10^6$$

سوال 18) گزینه ″ ج ″ پاسخ صحیح است .

اگر فرض کنیم کهکشان دارای N ستاره باشد، داریم:

$$N = \frac{\text{جرم کهکشان}}{\text{جرم خورشید}} = 10^{12}$$

پس با توجه به رابطه قدر مطلق کهکشان :

$$M_{\text{کهکشان}} - M_{sun} = -2.5\log\left(\frac{L_{\text{کهکشان}}}{L_{sun}}\right) = -2.5 \times \log(10^{12}) = -30 \rightarrow$$

$$M_{\text{کهکشان}} \approx -30 + 4.72 = -25.28$$

از طرفی می‌دانیم برای کهکشان‌های نزدیک و قرمزگرایی کم رابطه تقریبی زیر بر قرار است:

$$d = \frac{cz}{H_0}$$

که در آن d فاصله کهکشان تا ما و z قرمزگرایی کهکشان است. با استفاده از مدول فاصله داریم:

$$d = 10^{\frac{m_{\text{کهکشان}} - M_{\text{کهکشان}} + 5}{5}} = \frac{cz}{H_0}$$

با جایگذاری اعداد :

$$z \approx 2.6$$

سوال 19) گزینه ″ د ″ پاسخ صحیح است.

با توجه به رابطه قدر و عمق اپتیکی، ناظر در جوی که عمق اپتیکی بیشتری دارد قدر ظاهری ستاره را بیشتر اندازه گیری می‌کند. با توجه به تعریف عمق اپتیکی :

$$\tau = -\kappa\rho s = -\kappa\rho h \sec z$$

که s مسافت پیموده شده نور در جو است.

برای جو های مربوط به گزینه های یک تا سه، چون نور با زاویه $5°$ وارد جو شده پس بدلیل شکست داریم:

$$n \sin z' = \sin 5° \rightarrow \sin z' = \frac{\sin 5°}{2} \rightarrow z' \approx 2.5\,°$$

پس عمق اپتیکی برای این جو ها با توجه به یکسان بودن z و h و κ تنها به چگالی جو ربط دارد و هر کدام که چگالی بیشتری دارد، عمق اپتیکی بیشتری خواهد داشت.

اما برای جو چهارم، چون از ارتفاع صفر شروع می‌شود، مسیری که نور در جو طی می‌کند با همان فاصله سمت‌الراسی $5°$ خواهد بود. پس برای این جو داریم :

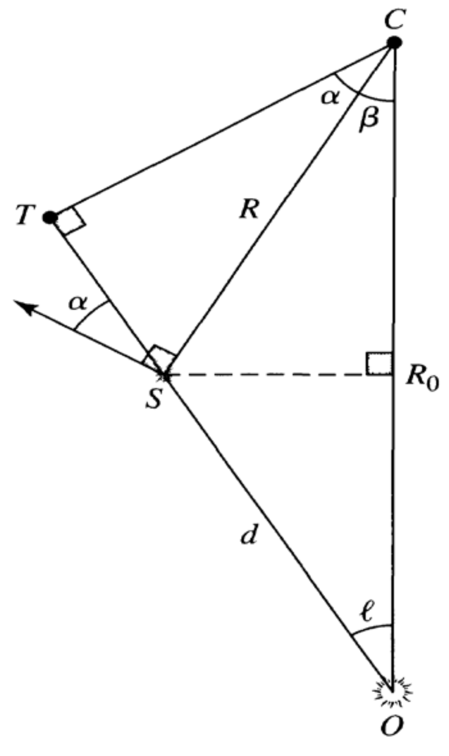
$$\tau = -\frac{\kappa\rho h}{\cos 5°}$$

که با توجه به اعداد سوال، مقدار فوق از بقیه گزینه ها بیشتر است.

سوال 20) گزینه ″ الف ″ پاسخ صحیح است.

وقتی سرعت مدارهای دایروی با شعاع مداری رابطه‌ی خطی دارد، سرعت زاویه‌ای مدارها ثابت و یکسان خواهد بود. به این نوع چرخش اصطلاحا چرخش جسم صلب گفته می‌شود، چون تمام ذرات با سرعت زاویه‌ای یکسان گردش می‌کنند و نسبت به هم ساکن هستند. یعنی ناظر بیرون کهکشان آن را مانند یک جسم صلب می‌بیند که با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد اما ناظران درون کهکشان همواره نسبت به هم ساکن هستند. در نتیجه هیچ اثر دوپلری را در ستاره‌های داخل کهکشان مشاهده نمی‌کنند و برای تمام خطوط طیفی، همان طول موج آزمایشگاه را مشاهده می‌کنند.

در واقع با توجه شکل زیر برای سرعت شعاعی داریم :



$$v_r = v\cos\alpha - v_{sun}\sin l$$

و همچنین داریم :

$$\frac{\cos\alpha}{R_{sun}} = \frac{\sin l}{R} \rightarrow \cos\alpha = \frac{R_{sun}}{R}\sin l$$

$$\rightarrow v_r = \left(\frac{v}{R} - \frac{v_{sun}}{R_{sun}}\right) R_{sun}\sin l = (\Omega - \Omega_{sun}) R_{sun}\sin l = 0$$

سوال 21) گزینه ˝ ب ˝ پاسخ صحیح است .

در مدل‌هایی که برای ماده و تابش کیهانی پیشنهاد شده، با توجه به تابع توزیع ذرات، میتوان نشان داد که دمای ماده و دمای تابش به صورت زیر با ضریب مقیاس رابطه دارند:

$$\frac{T_{rad}}{a} = T_{0,rad} \,, \frac{T_{matt}}{a_2} = T_{0,matt}$$

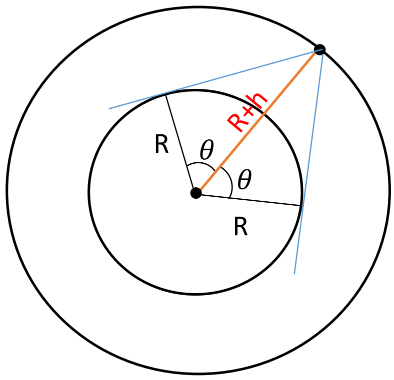
پس با گذشت زمان، دمای ماده کیهانی سریع‌تر از تابش افت میکند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ˝ الف ˝ به این دلیل نادرست است که در زمان واجفتیدگی نوترینو و فوتون، دمای نوترینو به اندازه ضریب $\sqrt[3]{\frac{4}{11}}$ از دمای فوتون کمتر شده است. پس نوترینو سردتر از تابش پس زمینه کیهانی است. گزینه ˝ج˝ به این دلیل نادرست است که منشا تابش پس زمینه کیهانی، واجفتیدگی فوتون از ماده یا همان آخرین سطح پراکندگی است. گزینه ˝ د ˝ به این دلیل نادرست است که بدلیل اصل همگنی، دمای جهان درهمه نقاط با هم برابر است. پس هیچ انتقال گرمایی نداریم و فرایند یک فرایند بی‌دررو است.

سوال 22) گزینه ˝ ج ˝ پاسخ صحیح است.

دورترین مکانی که ناظر می‌تواند سیگنال بازتابی از یونسفر را مشاهده کند، این است که یک پرتو مماس بر سطح زمین بفرستد و بازتاب آن را مشاهده کند. پس مساحت مورد نظر یک عرقچین به شعاع θ است که مرکز آن روی ناظر قرار دارد.



$$\cos\theta = \frac{R_e}{R_e+h} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)$$

$$\rightarrow \text{درصد مشاهده شده} = \frac{2\pi(1-\cos 2\theta)}{4\pi} \approx 3\%$$

سوال 23) گزینه " د " پاسخ صحیح است .

از آن‌جا که حرکت مداری ستاره در راستای خطّ دید ناظر است، جابه‌جایی ستاره در آسمان تنها بر اثر اختلاف منظر رخ خواهد داد. زاویه‌ی اختلاف منظر برابر با نصف جابه‌جایی است.

$$p = \frac{0.005}{2} = 2.5\times 10^{-3}\,'' \Rightarrow d_{(pc)} = \frac{1}{p''} \Rightarrow d = 400\ pc$$

سوال 24) گزینه " ج " پاسخ صحیح است .

در این مسئله چون از اثرات جوی چشم‌پوشی شده است شفق را در نظر نمی‌گیریم. ابتدا با نوشتن یک رابطه کسینوس‌ها برای مثلث کروی‌ای که یک رأس آن قم و یک رأس سمنان و یک رأس قطب شمال باشد فاصله زاویه‌ای بین قم و سمنان (θ) را می‌یابیم:

$$\cos\theta = \sin\phi_{\text{قم}}\ \sin\phi_{\text{سمنان}} + \cos\phi_{\text{قم}}\ \cos\phi_{\text{سمنان}} \cos\left(l_{\text{سمنان}} - l_{\text{قم}}\right)$$

$$\theta \approx 2^\circ$$

مسئله را طوری حل می‌کنیم که علی موقع غروب آفتاب در سمنان، به سمنان برسد و بعد ساعتی که به دست آوردیم را به اضافه 15 دقیقه می‌کنیم تا علی سر اذان مغرب به افق سمنان به آن‌جا برسد. باید زاویه ساعتی خورشید (x) در قم را طوری پیدا کنیم که اگر علی در آن موقع حرکت کند، پس از گذشت مدت زمان سفر،

موقعی به سمنان برسد که خورشید در آنجا در حال غروب است. ابتدا زاویه ساعتی غروب در سمنان را می‌یابیم. می‌دانیم موقع غروب، ارتفاع خورشید تقریباً صفر است. برای مثلث کروی‌ای که یک رأس آن سرسوی ناظر سمنانی و یک رأس آن ستاره قطبی و رأس دیگرش خورشیدِ روی افق (با میل $\delta = 23.5°$) باشد، داریم:

$$\cos 90° = 0 = \sin\delta \sin\phi_{\text{سمنان}} + \cos\delta\cos\phi_{\text{سمنان}}\cos H_{\text{غروب}} \rightarrow H_{\text{غروب}} \approx 108°$$

اگر سرعت چرخش زاویه‌ای زمین به دور خود را ω بنامیم، در مدت زمانی که این سفر انجام می‌شود، زاویه ساعتی خورشید برای ناظر در قم از x تا $x + \omega t$ تغییر می‌کند. در لحظه‌ی آخر(پایان سفر) ناظر سمنانی زاویه ساعتی خورشید را $x + \omega t + (l_{\text{سمنان}} - l_{\text{قم}})$ می‌بینند. در نتیجه باید این زاویه‌ساعتی را با $H_{\text{غروب}}$ برابر قرار دهیم.

$$t = \frac{R\theta_{rad}}{v} \approx 3h\ 14m$$

و

$$x = H_{\text{غروب}} - \omega t - \left(l_{\text{سمنان}} - l_{\text{قم}}\right) \approx 57.188° \approx 3\text{h } 49\text{m}$$

اگر پانزده دقیقه به جواب بالا اضافه کنیم زمان بلیط تقریباً ساعت $4:05$ خواهد شد.

سوال 25) گزینه ″ د ″ پاسخ صحیح است.

دستگاه مختصات دلخواهی در نظر بگیرید که محور y آن عمود بر دیسک کهکشان و محور x آن عمود بر y و در صفحه حرکت ذره باشد. از تقارن می‌توانیم نتیجه بگیریم که نیروی وارد شده به ذره باید در راستای محور y باشد. پس داریم :

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\pi G\sigma m = cte \end{cases}$$

که معادلات فوق همان معادلات مربوط به حرکت پرتابی معمولی هستند. پس شکل مدار سهمی خواهد بود. مدت زمان پرتاب نیز برابر مدت زمانی است که مولفه y صفر می‌شود. با توجه به معادله فوق داریم:

$$y = -\frac{1}{2}\ (2\pi G\sigma)t^2 + v_{0y}t + y_0 = 0$$

چون پرتابه از صفحه کهکشان پرتاب شده y_0 آن صفر است.

$$y(T) = -\frac{1}{2}(2\pi G\sigma)T^2 + v_0 \cos 30 \ T = 0 \rightarrow T = \frac{v_0 \cos 30}{\pi G\sigma}$$

حال با توجه به این که جرم وشعاع کهکشان را میدانیم، باید چگالی سطحی آن را تخمین بزنیم :

$$\sigma = \frac{M_{gl}}{\pi R_{gl}^2} = \frac{10^{11} M_{sun}}{\pi (15\ kp)^2} \rightarrow T = \frac{v_0 \cos 30}{G M_{gl}} R_{gl}^2 \approx 22\ Myr$$

سوال 26) گزینه ″ ج ″ پاسخ صحیح است .

در صورتی که مدار بیضوی باشد، امکان ندارد که سرعت عرضی ($Transverse\ Velocity$) به صفر برسد. برای اثبات این امر، می‌تواند نشان داد برای مدار بیضوی سرعت عرضی برابر با مقدار زیر است:

$$v_t = r\dot{\theta} = \frac{\mu}{h}(1 + e \cos \theta)$$

برای این که v_t صفر شود باید داشته باشیم :

$$1 + e \cos \theta = 0 \ \rightarrow \cos \theta = \ -\frac{1}{e}$$

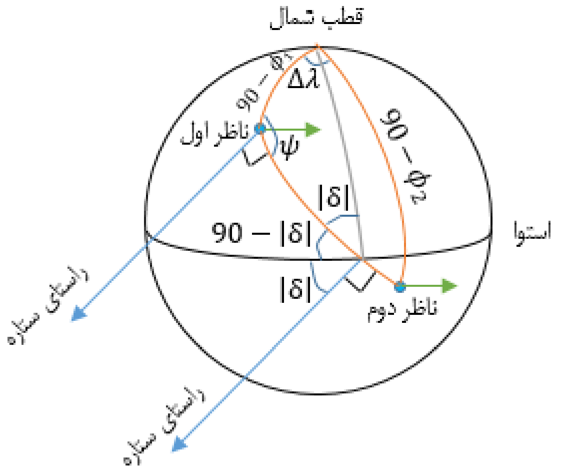
چون برای بیضی ، e همواره بین صفر و یک است ، پس معادله فوق جواب ندارد و این سرعت هیچگاه صفر نمی‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ″ الف ″ به این دلیل نادرست است که: به ماهواره‌هایی که از دید تمامی ناظران ثابت به نظر می‌رسند، ماهواره‌های زمین‌ثابت (GEO) گفته می‌شود.گزینه ″ ب ″ به این دلیل نارست است که : در صورتی که اندازه‌ی زاویه‌ای بادبان‌های یک ماهواره برابر با اندازه‌ی زاویه‌ای خورشید باشند، امکان ایجاد گرفت کامل وجود دارد. گزینه ″ د ″به این دلیل نادرست است که: درصورتی که بشقاب در هر دقیقه 5 درجه بچرخد، مدّت زمان ارتباط با ماهواره ($Contact\ Time$) ″حدودا″ 30 دقیقه خواهد بود که مربوط به ماهواره‌های مدار پایین (LEO) است. برای اطمینان می‌توانید شعاع مداری چنین ماهواره‌ای را با شعاع مداری حدودی به دست آمده از صورت سؤال مقایسه کنید.

سوال 27) گزینه ″ ج ″ پاسخ صحیح است.

همان‌طور که از شکل معلوم است چون زمین پادساعتگرد به دور خود می‌چرخد (پیکان‌های سبزرنگ) و سوال به ما گفته است ستاره برای دو ناظر در حال غروب است، میل ستاره باید



منفی باشد. در شکل، دایره‌عظیمه‌ای که دو ناظر را به هم وصل می‌کند، مکان هندسی نقاطی است که برای آن نقاط، ستاره در آن لحظه در حال غروب است. ابتدا از مثلث کروی با ضلع‌های نارنجی توسط رابطه چهارجزئی، ψ را می‌یابیم:

$$\sin\phi_1\cos\Delta\lambda = \cos\phi_1\tan\phi_2 - \frac{\sin\Delta\lambda}{\tan\psi}$$

$$\rightarrow \psi \approx 140°$$

حال با نوشتن رابطه‌ی سینوس‌ها برای مثلث کروی‌ای که دو ضلع آن نارنجی و یک ضلعش خاکستری است داریم:

$$\sin|\delta| = \cos\phi_1\sin\psi \implies |\delta| \approx 24.4°$$

با توجه به توضیح داده شده راجع به منفی بودن میل جواب نهایی می‌شود:

$$\delta \approx -24.4°$$

سوال 28) گزینه ″ ج ″ پاسخ صحیح است .

قبل از مشاهده انفجار ابرنواختری ، نوترینوهای تولید شده از آن بدلیل اینکه هیچ بر هم کنشی با اجزای بین ستاره ای ندارند به ما خواهند رسید. در واقع یکی از روش های آشکارسازی ابرنواخترها مشاهده نوترینو تابش شده از آن‌هاست که بدلیل دشوار بودن آشکارسازی نوترینو در آشکارسازهای زمینی، این کار هم‌اکنون عملی نیست. در واقع علت بوجود آمدن انفجار ابرنواختری، این است که طول پویش آزاد نوترینو بدلیل بالا رفتن چگالی ستاره کم شده و فشار نوترینو باعث ناپایداری و انفجار خواهد شد.

سوال 29) گزینه ″ ج ″ پاسخ صحیح است .

در ستارگان بسیار سنگین، زیاد بودن دما در نواحی بیرونی سبب یونش تمامی هیدروژن می‌شود. این عامل سبب ایجاد کدریت پایین در ناحیه‌ی فرابفش می‌شود که نتیجه‌ی آن فشار تابشی زیاد در نواحی بیرونی و ناپایداری جوّی است.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه ″ الف ″ به این دلیل نادرست است که: نواحی بیرونی ستارگان بسیار سنگین تماماً تابشی هستند و همرفت سهمی در انتقال انرژی آن‌ها ندارد. گزینه ″ ب ″ به این دلیل نادرست است که: برهم‌کنش با میدان مغناطیسی کهکشان، در مقایسه با سایر عوامل تأثیر چندانی بر پایداری ستارگان ندارد. گزینه ″ د ″ به این دلیل نادرست است که: در ستارگان بسیار سنگین بستگی شدید آهنگ تولید انرژی به دما سبب می‌شود گرادیان دما به شدّت عمیق شود و هسته‌ی این ستارگان همرفتی و ناپایدار شود، امّا این امر اثری بر نواحی بیرونی ستاره ندارد.

سوال 30) گزینه ″ ب ″ پاسخ صحیح است .

هنگامی زمین به یک سیاهچاله تبدیل میشود که شعاع آن با شعاع شوارتزشیلد برابر شود. پس داریم:

$$R'_e = R_{sh} = \frac{2GM}{c^2}$$

با توجه به ثابت بودن چگالی :

$$M = \frac{4}{3}\pi {R'_e}^3 \rho_0 \rightarrow R'_e = \frac{2G}{c^2}\left(\frac{4}{3}\pi {R'_e}^3\rho_0\right) = \frac{8\pi G\rho_0 {R'_e}^3}{3c^2}$$

با فرض این که زمین از ابتدا کره‌ای همگن باشد:

$$R'_e = \frac{8\pi G {R'_e}^3}{3c^2}\frac{3M_0}{4\pi R_0^3} \rightarrow R'_e = \sqrt{\frac{c^2 R_0^3}{2GM_0}} \rightarrow R'_e = 1.71 \times 10^{11}\ m$$

$$\rightarrow \frac{R'_e}{R_e} \approx 27000$$

سوال 31) گزینه ″ د ″ پاسخ صحیح است.

با توجه به اینکه ستاره از فروپاشی اورانیوم به جای همجوشی هسته‌ای استفاده می‌کند، پس مقیاس زمانی عمر ستاره به طور تقریبی با مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار اورانیوم موجود در هسته کاهش یابد برابر است. می‌دانیم تعداد اورانیوم‌های باقیمانده در هر زمان دلخواه برابر است با:

$$N = N_0 \exp(-\frac{t}{T}\ln 2)$$

که در رابطه فوق T نیمه عمر اورانیوم و N_0 تعداد اورانیوم هاست. به طور تقریبی، هنگامی که مقدار اورانیومها به $\frac{1}{10}$ مقدار اویه کاهش یابد، می‌گوییم ستاره عمرش به پایان رسیده است. پس داریم :

$$\frac{N_0}{10} = N_0 \exp(-\frac{t}{T}\ln 2) \rightarrow t = T(\ln 5) \rightarrow t \approx 7\ Gyr$$

که به گزینه ″ د ″ نزدیک تر است .

دقت کنید که اگر مقدار کاهش اورانیوم را مقداری به جز $\frac{1}{10}$ انتخاب می‌کردیم، باز هم عمر ستاره از مرتبه نیمه عمر اورانیوم بدست می‌آمد.

سوال 32) گزینه ″ الف ″ پاسخ صحیح است .

با توجه به این که دمای CMB در حال حاضر 2.7 کلوین است، پس داریم :

$$T = \frac{T_0 a_0}{a} = \frac{T_0}{4} = 0.675\ k$$

با فرض این که تابش زمینه کیهانی، از تابش جسم سیاه پیروی می‌کند، چگالی انرژی CMB برابر است با :

$$u_{CMB} = a_r T^4 = \frac{4\sigma}{c}\ T^4 \rightarrow u_{CMB} = 1.567 \times 10^{-16}\ J.m^{-3}$$

می‌دانیم انرژی متوسط فوتون‌ها برابر است با :

$$\langle E \rangle = 2.7 k_B T = 2.52 \times 10^{-23} J$$

پس برای چگالی عددی CMB داریم :

$$n_{CMB} = \frac{u_{CMB}}{\langle E \rangle} = \frac{1.567 \times 10^{-16}}{2.52 \times 10^{-23}} = 6.23 \times 10^6\ m^{-3}$$

بنابراین در هر متر مکعب از کیهان، 6.22×10^6 فوتون CMB وجود دارد.

سوال 33) گزینه ″ د ″ پاسخ صحیح است .

مطابق شکل، بیشترین و کمترین فاصله عبارت اند از:

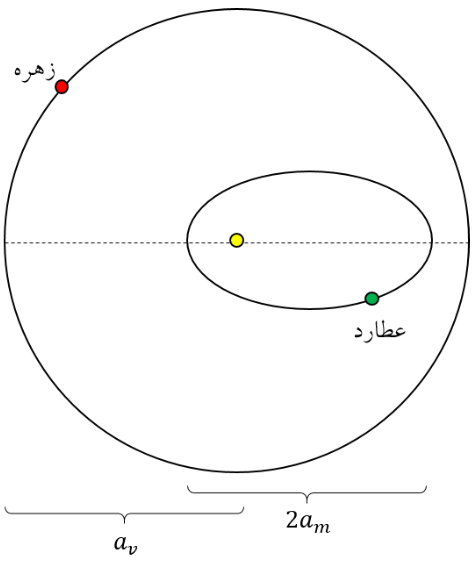
$$\begin{cases} d_{max} = a_v + a_m(1+e) \\ d_{min} = a_v - a_m(1+e) \end{cases}$$

$$\rightarrow d_{max} + d_{min} = 2a_v$$

$$\rightarrow a_v = 0.723\ AU$$

سپس با استفاده از معادلات بالا، خروج از مرکز را می‌یابیم:

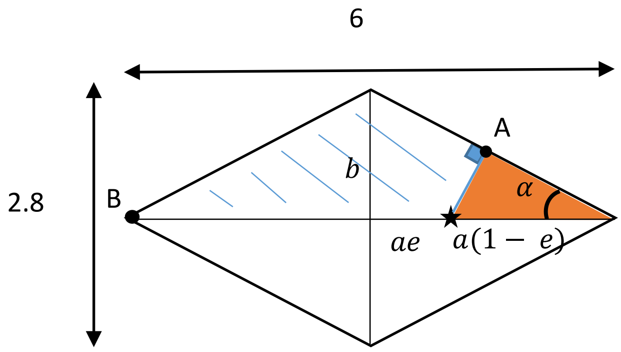
$$e = \frac{d_{max} - a_v}{a_m} - 1 \Rightarrow e = 0.207$$



سوال 34) گزینه ″ ب ″ پاسخ صحیح است .

نزدیک‌ترین موقعیت سیاره نسبت به ستاره هنگامی‌ست که مانند شکل زیر خط واصل سیاره و ستاره بر مسیر سیاره عمود شود. دورترین موقعیت هم با حرف B در شکل نشان داده شده است.

برای محاسبه‌ی زمانی که سیاره از A به B می‌رود با استفاده از قانون دوم کپلر، تنها کافیست مساحت ناحیه هاشور خورده را بدست آوریم که برابر است با مساحت نصف لوزی منهای مساحت مثلث نارنجی.



$$S = ab - S_\Delta$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a(1-e)\sin\alpha \times a(1-e)\cos\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 25°$$

$$\frac{S}{S_{tot}} = \frac{ab - 0.5a^2(1-e)^2 \sin\alpha\cos\alpha}{2ab} = 0.5 - 0.25\frac{a}{b}(1-e)^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\rightarrow \frac{S}{S_{tot}} = 0.4$$

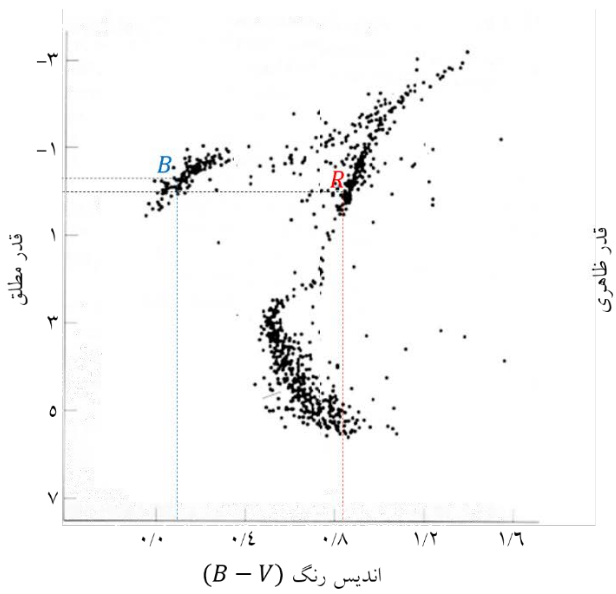
طبق قانون دوم کپلر:

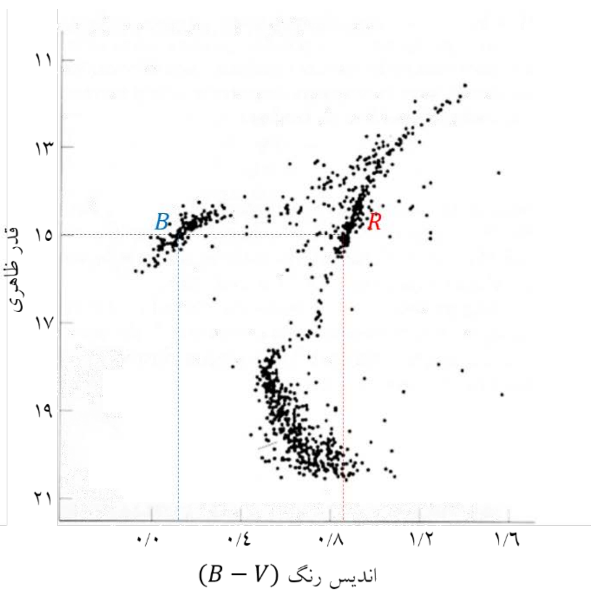
$$t = \frac{S}{S_{tot}} \times T = 0.4\, year$$

سوال 35) گزینه ″ ب ″ پاسخ صحیح است .

رابطه‌ی قدر ظاهری و مطلق با در نظر گرفتن جذب میان‌ستاره‌ای به صورت زیر است:

$$m = M + 5\log d - 5 + A_{\lambda} \Rightarrow \frac{A_B}{A_R} = \frac{m_B - M_B + 5 - 5\log d}{m_R - M_R + 5 - 5\log d}$$





از آن‌جا که ستارگان سمت راستِ نمودار تابش ″ نسبی″ بیشتری در ناحیه‌ی قرمز دارند (یعنی بیشتر نورشان قرمز است و جذب شدن نور قرمز بر قسمت بیشتری از نورشان تأثیر می‌گذارد) و ستارگان سمت چپ تابش

نسبی بیشتری در ناحیه‌ی آبی دارند، با استفاده از اختلاف قدر ظاهری و قدر مطلق این ستارگان می‌توان نسبت ضریب‌ها را محاسبه نمود. با توجّه به نمودار:

$$m_B = m_R = 15\ , M_B = -0.2\ \ , M_R = 0$$

با جایگذاری این اعداد، مقدار 1.3 بدست می‌آید.

پایان