یا سریع الحساب

معاونت دانش‌پژوهان جوان
کمیته ملی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

سوالات و پاسخنامه تشریحی یازدهمین آزمون مرحله اول المپیاد نجوم و اخترفیزیک

G	ثابت جهانی گرانش	$N\,m^2\,kg^{-2}$	۶٫۶۷×۱۰$^{-۱۱}$
σ	ثابت استفان-بولتزمن	$W\,m^{-2}\,K^{-4}$	۵٫۶۷×۱۰$^{-۸}$
$a=4\sigma/c$	ثابت تابش	$J\,m^{-3}\,K^{-4}$	۷٫۵۶×۱۰$^{-۱۶}$
k_B	ثابت بولتزمن	$J\,K^{-1}$	۱٫۳۸×۱۰$^{-۲۳}$
h	ثابت پلانک	$J.s$	۶٫۶۳×۱۰$^{-۳۴}$
e	بار الکترون	C	۱٫۶۰×۱۰$^{-۱۹}$
m_e	جرم الکترون	kg	۹٫۱×۱۰$^{-۳۱}$
$1u$	واحد جرم اتمی	kg	۱٫۶۷×۱۰$^{-۲۷}$
c	سرعت نور	m/s	۳٫۰۰×۱۰^{۸}
pc	پارسک	m	۳٫۰۹×۱۰^{۱۶}
$r_{earth}=AU$	واحد نجومی	m	۱٫۵۰×۱۰^{۱۱}
Ly	سال نوری	m	۹٫۴۶×۱۰^{۱۵}
R_{sun}	شعاع خورشید	m	۶٫۹۶×۱۰^{۸}
M_{sun}	جرم خورشید	kg	۱٫۹۹×۱۰^{۳۰}
R_{earth}	شعاع زمین	m	۶٫۳۸×۱۰^{۶}
M_{earth}	جرم زمین	kg	۵٫۹۷×۱۰^{۲۴}
R_{venus}	شعاع زهره	m	۶٫۰۵×۱۰^{۶}
M_{venus}	جرم زهره	kg	۴٫۸۷×۱۰^{۲۴}
r_{venus}	فاصله‌ی زهره از خورشید	m	۱٫۰۸×۱۰^{۱۱}
L_{sun}	درخشندگی خورشید	W	۳٫۸۵×۱۰^{۲۶}
M_{sun}	قدر مطلق خورشید		۴٫۷۲
m_{sum}	قدر ظاهری خورشید		-۲۶٫۷
H_0	ثابت هابل	$(km/s)/Mpc$	۷۳
f_{sun}	ثابت خورشیدی	Wm^{-2}	۱٫۳۷×۱۰^{۳}
N_A	عدد آووگادرو	mol^{-1}	۶٫۰۲×۱۰^{۲۳}
R	ثابت گازها	$J\,mol^{-1}\,K^{-1}$	۸٫۳۱۴
r_B	شعاع اتم بور	m	۵٫۲۹×۱۰$^{-۱۱}$
eV	الکترون ولت	J	۱٫۶۰×۱۰$^{-۱۹}$
$S_{ایران}$	مساحت ایران	km^2	۱۶۴۸۱۹۵
λ,β_{Tehran}	مختصات جغرافیایی تهران	$Degree$	35.70^{o}N,51.42^{o}E
H_2O	یک مول آب	gr	۱۸
He	یک مول هلیوم	gr	۴
yr	سال	s	۳٫۱۵×۱۰^{۷}

توجه: تعداد ۳۵ سوال در ۱۰ صفحه تنظیم شده، که پیشنهاد می‌شود پیش از شروع آن را وارسی نمایید.

۱- استوانه ای به ارتفاع L که چگالی آن K برابر آب است بر روی سطح آب به صورت عمودی (در راستای ارتفاع خود) شناور است. دوره ی تناوب نوسانات استوانه روی سطح آب کدام گزینه است؟

۱) $\pi\sqrt{\frac{KL}{2g}}$ ۲) $\pi\sqrt{\frac{2KL}{g}}$ ۳) $\pi\sqrt{\frac{KL}{g}}$ ۴) $2\pi\sqrt{\frac{KL}{g}}$

۲- یکی از روشهای موقعیت یابی با استفاده از ستاره‌ها انجام می‌شود(Stellar Positioning System). در این روش از آسمان تصویرگیری می‌شود و با استفاده از جهت دوربین یا تلسکوپ مورد استفاده و زمان عکس برداری، می‌توان طول و عرض جغرافیایی محل را تعیین نمود. برای این منظور حوالی تهران (با دقت چند صد کیلومتر) یک تصویر با نور گیری یک ثانیه از آسمان ثبت می‌کنیم و با محاسبات مربوطه، طول و عرض جغرافیایی ناظر را مشخص کنیم. مدت زمان تصویر برداری (۱ ثانیه) به تنهایی چند متر خطا در طول جغرافیایی ایجاد می‌کند؟

۱) ۴۶۵ متر ۲) ۵۶۷ متر ۳) صفر ۴) ۳۸۱ متر

۳- سیاره‌ای در مداری بیضوی با خروج از مرکز $e=0.2$ و نیم محور اطول $a=1\ AU$ به دور ستاره‌ای به جرم M در حال حرکت است. در لحظه‌ی عبور سیاره از نقطه‌ی حضیض خود ناگهان x درصد از جرم ستاره از دست می رود. x حداکثر چقدر می‌تواند باشد تا سیاره از این منظومه فرار نکند؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۵ ۳) ۴۰ ۴) ۶۰

۴- یکی از روش‌های تعیین قبله استفاده از موقعیت خورشید در روزهای ۷ خرداد یا ۲۳ تیرماه است. در این ایام در لحظه‌ی اذان ظهر به وقت مکه (حدودا ساعت ۱۳:۴۵ به وقت رسمی ایران) خورشید دقیقا در بالای سر کعبه ($21.42^oN,39.82^oE$) قرار می‌گیرد. به طوری که هر ناظری به هنگام روز در هر نقطه از زمین که باشد می‌تواند در آن لحظه امتداد سایه‌ی یک شاخص عمودی را پیدا کرده و جهت قبله را در آن محل دقیقا به دست آورد. حال اگر ناظری در تهران ($35.70^oN,51.42^oE$) سایه‌ی یک شاخص عمودی به طول یک متر را اندازه گیری کند، طول سایه تقریبا چقدر خواهد بود؟

۱) صفر ۲) ۹۵ سانتیمتر ۳) ۳۲ سانتیمتر ۴) ۴۷ سانتیمتر

۵- فرض کنید به همراه منظومه‌ی شمسی در مرکز یک خوشه‌ی ستاره‌ای به شعاع ۵۰ پارسک زندگی می کنیم که همه‌ی ستاره های آن دارای قدر مطلق $M=5$ هستند. چگالی عددی ستاره‌ها در این خوشه یکنواخت بوده و برابر ۱۰ ستاره در پارسک مکعب است. در شب تقریبا چند هزار ستاره با چشم غیر مسلح قابل رویت می باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۷۰ ۴) ۳۵۰

۶- برای تعیین فاصله ی یک خوشه ی کروی از رصد قیفاووسی ها استفاده می کنیم. یک قیفاوسی با دوره ی تناوب ۱۰۰ روز را رصد می کنیم که قدر ظاهری آن در دو باند مختلف به صورت $m_V=26.94$, $m_I=25.64$ است. رابطه‌ی دوره تناوب-قدر مطلق قیفاووسی ها در دوباند مختلف به صورت زیر است:

$$M_V=-2.70\ Log\ (P) + 17.04$$
$$M_I=-2.96\ Log\ (P) + 16.56$$

که در آن دوره‌ی تناوب، P بر حسب روز است. اگر ضرایب خاموشی در این دو طول موج با رابطه‌ی $A_I=0.6A_V$ به هم مربوط شوند، فاصله‌ی این خوشه از ما چند کیلوپارسک است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۷- یک ساعت آونگ دار در ایستگاه بین‌المللی فضایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. دوره‌ی تناوب این ایستگاه فضایی ۵۵۰۴ ثانیه است. خطای اندازه گیری زمان در این ایستگاه در هر ساعت، چند دقیقه خواهد بود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸- یکی از نظریه‌های جایگزین ماده‌ی تاریک نظریه‌ی موند است. طبق این نظریه، در صورتی که شتاب حرکت جسمی کمتر از مقدار $a_0 = 10^{-10}\ m/s^2$ باشد (که به حد شتاب موند معروف است) قانون دوم نیوتون به شکل سنتی آن برقرار نیست؛ و اصطلاحا باید از مکانیک نیوتونی تعمیم یافته برای توصیف حرکت اجرام استفاده کنیم. ماهواره‌ی وویجر در ۱۴ مهرماه ۱۳۵۶ به فضا پرتاب شده است. این ماهواره با سرعت $61000\ km/h$ در حال دور شدن از منظومه شمسی است. حدودا از چه سالی به بعد برای توصیف حرکت این ماهواره باید از مکانیک نیوتونی تعمیم یافته استفاده کنیم؟

۱) ۱۳۹۵ ۲) ۳۵۲۰ ۳) ۲۴۹۵ ۴) ۱۵۲۳

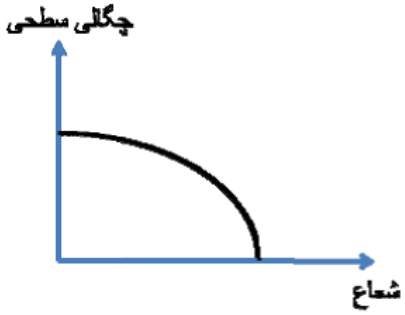
۹- روشنایی سطحی مرکز یک کهکشان برابر است با ۱۵ قدر بر ثانیه‌ی قوسی مربع ($mag.arcsec^{-2}$). یعنی هر ثانیه‌ی قوس مربع معادل چشمه‌ی نوری با قدر ۱۵ است. این روشنایی سطحی معادل با چند درخشندگی خورشیدی بر پارسک مربع ($L_0.pc^{-2}$) است؟

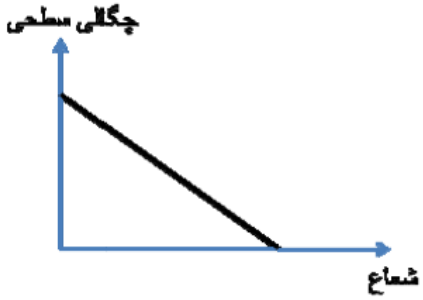
۱) ۹۰۰ ۲) ۸۵۰۰ ۳) ۱۸۰۰۰ ۴) ۳۲۰۰۰

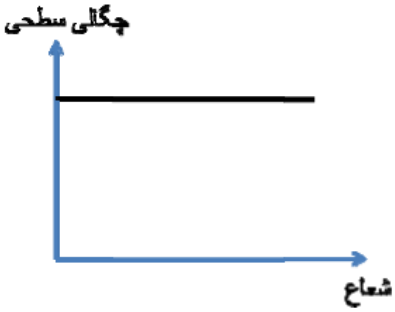
۱۰- ستاره‌ای با دمای سطحی ۱۳۶۰۰۰ کلوین و درخشندگی ۲۰۰ برابر درخشندگی خورشید مشاهده شده است. نوع این ستاره کدام است؟

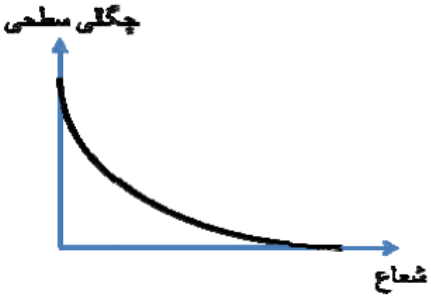
۱) ستاره‌ی رشته‌ی اصلی با جرم تقریبا ۴٫۵ برابر خورشید
۲) غول قرمز با جرم ۴٫۵ برابر خورشید
۳) کوتوله‌ی سفید
۴) غول آبی در انتهای رشته‌ی اصلی

۱۱- ستاره در کره ای به شعاع a به طور یکنواخت توزیع شده است. نمودار چگالی سطحی این کره از دید ناظر زمینی (مثلا چند ستاره بر ثانیه‌ی قوس مربع) بر حسب فاصله از مرکز کدام گزینه است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۲- یکی از روشهای مرسوم در فاصله یابی ستاره‌ها استفاده از رده‌ی طیفی آن‌ها و قدر مطلق مربوط به آن رده‌ی طیفی است. البته ممکن است به دلیل دوتایی بودن آن ستاره، خطایی در این روش ایجاد شود. فرض کنید ستاره‌ای از رده‌ی طیفی خورشید با قدر ظاهری $m_V=7.22$ را مشاهده می‌کنیم. اگر این ستاره تک باشد فاصله‌ی آن را d_1 اندازه گیری می‌کنیم. بعد از مدتی مشخص می‌شود که این ستاره در واقع یک دوتایی است که از دوستاره‌ی مشابه خورشید تشکیل شده است. در این صورت فاصله‌ی صحیح را محاسبه کرده و با d_2 نشان می دهیم. مقدار $|d_1 - d_2|$ بر حسب پارسک به کدام گزینه نزدیکتر است؟

۱) ۱۳ ۲) ۴۴ ۳) ۲۲ ۴) ۳۱

۱۳- **پتانسیل گرانشی:** توده‌ی ابری باران‌زا در ارتفاع ۱۰۰۰ متری از سطح زمین قرار گرفته است؛ که باعث بارشی ۱۰ میلیمتری در مساحتی به ابعاد $100\ km^2\ (10km \times 10km)$ می‌شود. سرعت حدی قطرات باران در جو حدودا $7\ m/s$ است. تغییر دمای هوای منطقه‌ی تحت بارش در اثر این فرایند چند کلوین است؟ چگالی هوا را در این ناحیه ثابت فرض کرده و $1\ kg/m^3$ در نظر بگیرید. ظرفیت گرمایی ویژه‌ی هوا نیز $1000\ J/kg.K$ است

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۱ ۳) ۱ ۴) ۱۰

۱۴- نسبت تعداد قطرات باران به ازای هر یک میلیمتر باران در سطح کل کشور ایران، به تعداد ملکول‌های یک قطره باران چقدر است؟ (هر ۱۶ قطره آب یک میلی لیتر است)

۱) $۱۰^{-۱}$ ۲) $۱۰^{-۳}$ ۳) $۱۰^{-۵}$ ۴) $۱۰^{-۷}$

۱۵- فرض کنید کل مدت زمانی که ستاره‌ای به جرم دو برابرخورشید بر روی رشته‌ی اصلی (MS) سپری می‌کند که به فاز رشته ی اصلی (MS) معروف است تقریبا ۱/۷ میلیارد سال باشد. در طول این مدت، درخشندگی آن تقریبا ثابت و ۱۱ برابر درخشندگی خورشیدی است. جرم هسته‌ی هلیمی در پایان این فاز، تقریبا چند برابر جرم خورشید خواهد بود؟ انرژی تولید شده در اثر تولید یک اتم هلیوم برابر با ۲۵ میلیون الکترون ولت است.

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۴ ۴) ۱/۴

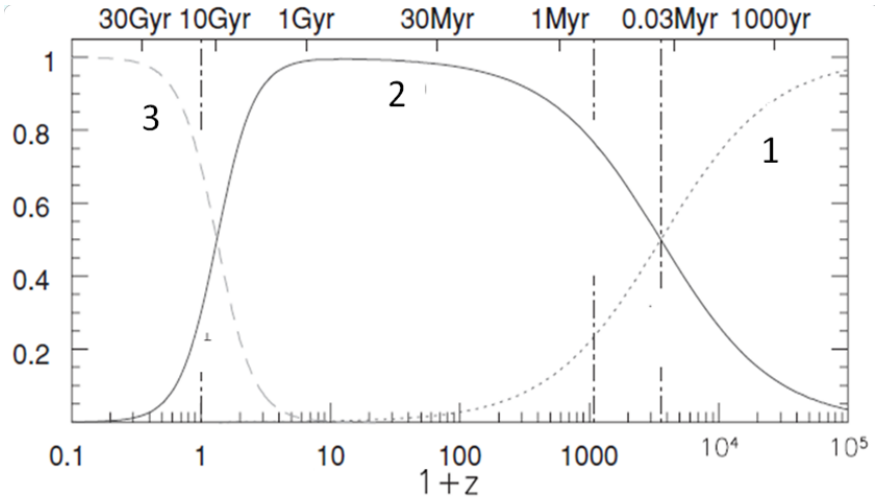
۱۶- ستاره‌ای سنگین را در نظر بگیرید که بر روی رشته‌ی اصلی در حال تحول است. اگر آهنگ خروج جرم که در اثر بادهای ستاره‌ای می باشد افزایش یابد، به ترتیب دمای مرکز و طول عمر ستاره در رشته‌ی اصلی چه تغییری می‌کند؟

۱) کاهش - افزایش
۲) افزایش - کاهش
۳) دما تغییر نمی کند چون طول عمر رشته ی اصلی فقط به جرم اولیه‌ی ستاره بستگی دارد.
۴) دما افزایش می یابد ولی طول عمر رشته‌ی اصلی تغییر نمی‌کند.

۱۷- در ابتدای شکل گیری ساختارها در کیهان، فرض می‌کنیم که فقط عامل گرانش در انقباض (رمبش) ساختارها نقش اصلی و غالب را ایفا می‌کند (یعنی هیچ عامل باز دارنده‌ای در مقابل گرانش وجود ندارد). زمان رمبش ساختاری مانند یک کهکشان به جرم $۱۰^{۱۲}$ جرم خورشید و شعاع ۱۰۰ کیلوپارسک چند برابر زمان رمبش ساختاری مانند یک خوشه‌ی کهکشانی با جرم $۱۰^{۱۵}$ جرم خورشید و شعاع ۱۰ میلیون پارسک است؟ ساختارها را به صورت کروی شکل در نظر بگیرید.

۱) ۳۰ ۲) $۱۰^{-۳}$ ۳) ۰٫۰۳۳ ۴) ۱۰۰۰

۱۸- محتویات تشکیل دهنده‌ی عالم به طور کلی شامل سه مولفه‌ی ماده، تابش و انرژی تاریک است. در شکل زیر نحوه‌ی تغییرات چگالی نسبی هر کدام از مولفه‌ها با زمان یا به عبارت دیگر با قرمزگرایی، z نشان داده شده است. منحنی‌های نقطه- چین (شماره‌ی ۱)، توپر (شماره‌ی ۲)، و خط- چین (شماره‌ی ۳) به ترتیب مربوط به کدام یک از مولفه‌ها است؟



۱) ماده – انرژی تاریک- تابش ۲) انرژی تاریک- تابش- ماده

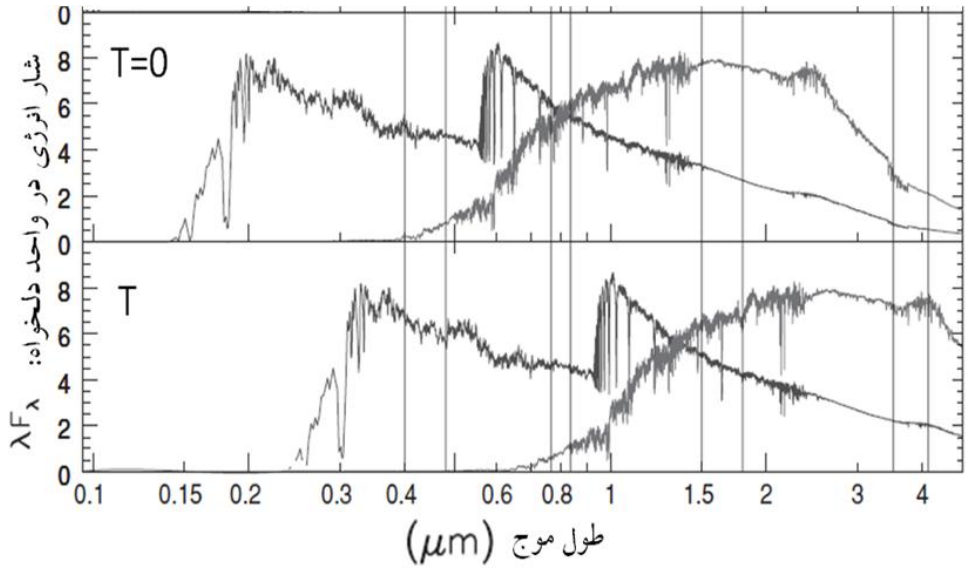
۳) ماده – تابش – انرژی تاریک ۴) تابش- ماده- انرژی تاریک

۱۹- زاویه‌ی قبله با امتداد جنوب در شهر پاریس ($48.86^oN,2.35^oE$) چند درجه است. موقعیت جغرافیایی کعبه $21.42^oN,39.82^oE$ است.

۱) ۶۰ درجه به سمت شرق ۲) ۶۰ درجه به سمت غرب

۳) ۳۰ درجه به سمت شرق ۴) ۳۰ درجه به سمت غرب

۲۰- در مدل سازی تحول کهکشانی طیف دونوع مختلف کهکشان، مدل سازی شده است. به طوری که طیف کهکشان‌ها در زمان حال ($T=0$) و در زمان گذشته (T) در شکل زیر نشان داده شده است. برآورد کنید فاصله‌ی این کهکشان‌ها از ما در زمان T چقدر بوده است؟



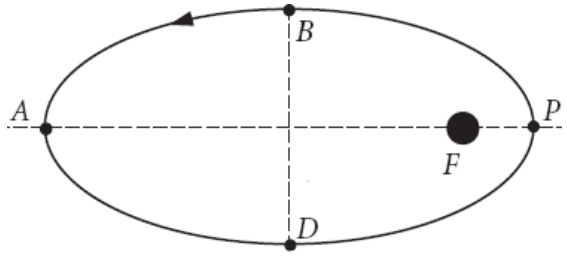
۱) ۳۰۰ مگا پارسک ۲) ۱۰ گیگا پارسک ۳) ۳ گیگا پارسک ۴) ۱ گیگا پارسک

۲۱- زمین را به صورت یک جسم سیاه تصور کنید. فرض کنید درخشندگی خورشید ۱/۵ برابر درخشندگی کنونی آن شود. در آن صورت دمای سطح زمین چند برابر دمای فعلی خواهد شد؟

۱) ۱ ۲) ۱/۱ ۳) ۱/۲ ۴) ۱/۵

۲۲- اثرات نجومی زیادی را می‌توان در تقویم‌های روزانه مشاهده کرد.

با یک مدل ساده از مسیر حرکت زمین به دور خورشید به صورت یک بیضی، می‌خواهیم خروج از مرکز زمین را تخمین بزنیم. با توجه به شکل زیر، اگر فاصله زمانی‌های DPB طول زمستان (۱۷۹ روز) و BAD طول تابستان باشند؛ خروج از مرکز زمین را تخمین بزنید.



۱) ۰/۰۳۰
۲) ۰/۰۲۶
۳) ۰/۰۲۰
۴) ۰/۰۱۷

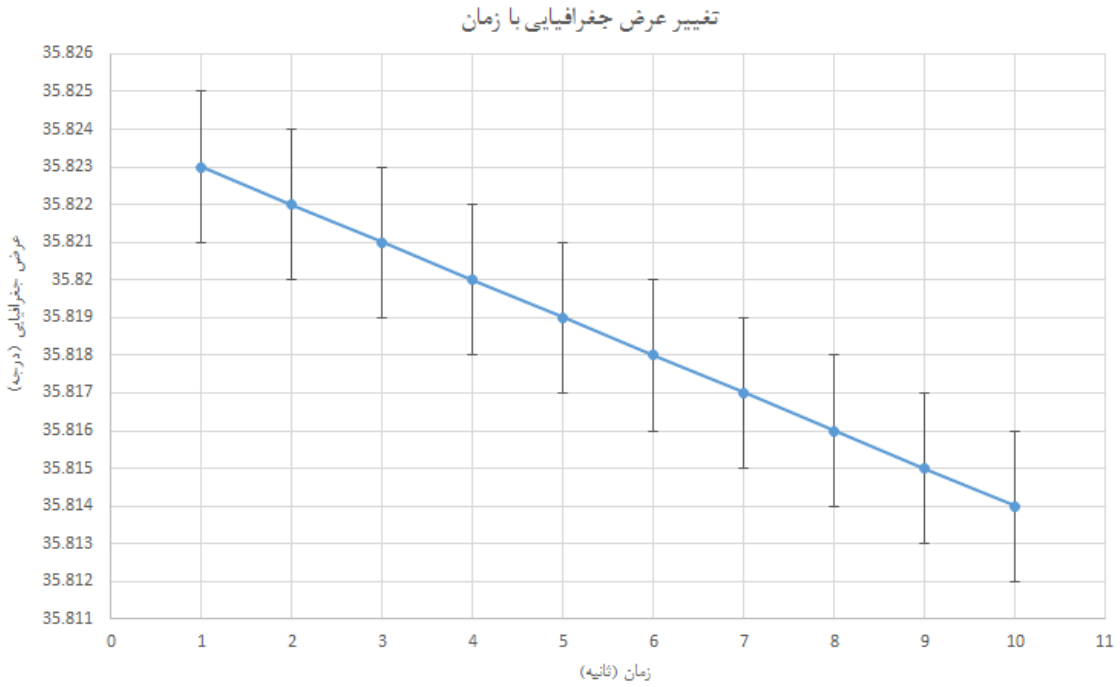
۲۳- ماهواره‌ای با شعاع مداری ۶۸۰۰ کیلومتر می‌خواهد پهنای شانه‌ی یک انسان روی سطح زمین را تشخیص بدهد. به این منظور حداقل به چه قطر دهانه‌ی تلسکوپی نیاز دارد؟

۱) ۱۰ سانتیمتر ۲) ۵۰ سانتیمتر ۳) ۱ متر ۴) ۳ متر

۲۴- اگر از دو عدسی محدب نازک متقارن، از جنس پیرکس با ضریب شکست ۱٫۴۷۴ که شعاع انحنای عدسی اول ۱٫۰۰۰ متر و شعاع انحنای عدسی دوم ۱۰٫۰ سانتیمتر است استفاده کنیم تا یک تلسکوپ بسازیم. فاصله بین آنها را چند سانتی متر باید باشد تا تلسکوپ ما درست کار کند؟

۱) ۱۱۰٫۰ ۲) ۹۰٫۰ ۳) ۹۴٫۹ ۴) ۱۱۶٫۰

۲۵- از موقعیت سنجی مکان رصد خودمان یک منحنی به صورت زیر به دست می‌آوریم. دقت موقعیت یابی ناظر چند متر است؟



۱) ۲۲۰ ۲) ۸۸۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۵۰

۲۶- تلسکوپ رصدخانه‌ی ملی ایران به قطر ۳٫۴ متر در ناحیه‌ی مرئی کار می‌کند. سطح آینه‌ی اصلی آن باید کمتر از یک دهم طول موج مرئی، صیقلی بوده و ناهمواری نداشته باشد.

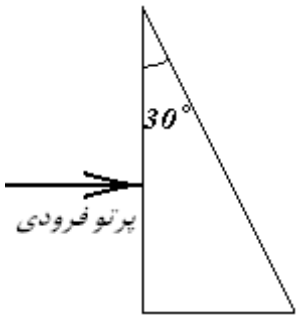
اگر فرض کنیم که این آینه قطری به اندازه‌ی کره‌ی زمین می‌داشت؛ به طوری که نسبت ناهمواری‌های آن به قطر آن، با نسبت ناهمواری‌های کنونی آن به قطر کنونی آن برابر بود؛ بیشترین ناهمواری و اختلاف سطح آن چقدر می‌شد؟

۱) ۲ سانتیمتر ۱) ۲۰ سانتیمتر ۲) ۲ متر ۳) ۲۰ متر

۲۷- برای یک شیشه‌ی اپتیکی رابطه‌ی کوشی به صورت زیر است:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \qquad A = 1.7280 \ , \quad B = 0.01342\ (\mu m^2)$$

از یک منشور به زاویه‌ی راس 30° به صورت نشان داده شده در شکل استفاده می‌کنیم. یک پرتو عمودی از یک لامپ سدیم به آن می‌تابانیم. اگر بخواهیم طول موج‌های نزدیک $\lambda_1=586.0\,nm$ و $\lambda_2=589.5\,nm$ را روی ۲ پیکسل جداگانه از یک CCD به ابعاد پیکسل $10\mu m \times 10\mu m$ تشخیص دهیم؛ فاصله CCD از محل خارج شدن پرتو از منشور چقدر باید باشد؟ ضریب شکست هوا ۱/۰۰۰۰ است.



۱) ۵۰ سانتی متر
۲) ۱۰ سانتی متر
۳) ۲ سانتی متر
۴) ۰/۴ سانتی متر

۲۸- یک سیستم دوتایی شامل دو ستاره‌ی نوترونی با جرم‌های مساوی ۱/۵ برابر جرم خورشید در نظر بگیرید. فرض کنید یکی از این ستاره‌های نوترونی پالسار بوده که دوره تناوب هر پالس آن ۲ ثانیه است. دوره تناوب مداری هم ۸ ساعت است. مدار حرکت دو ستاره، دایره‌ای بوده و نسبت به زمین از لبه دیده می‌شود. دامنه‌ی تغییرات دوره تناوب پالس چقدر خواهد بود؟ راهنمایی: دوره تناوب پالس P_p شامل انتقال دوپلری شبیه به انتقال دوپلری نور می‌شود.

۱) ۰/۱ ثانیه ۲) ۱ ثانیه ۳) ۰/۰۱ ثانیه ۴) ۰/۰۰۱ ثانیه

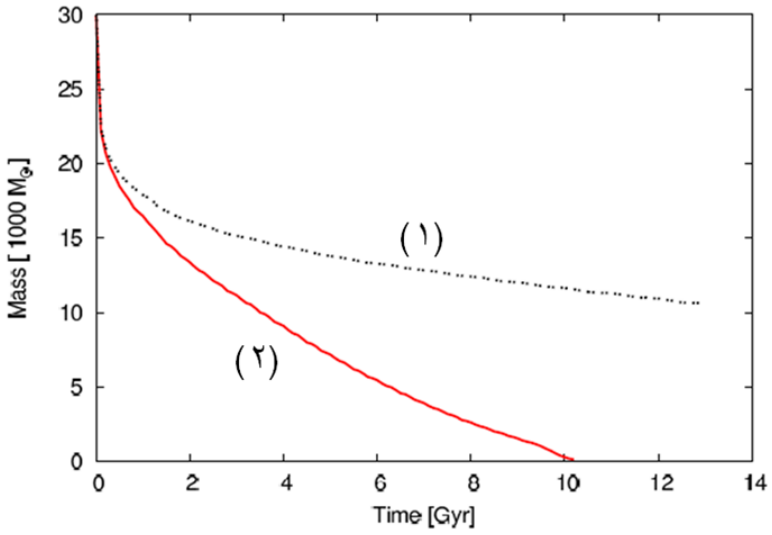
۲۹- **برافزایش در زمین:** یک شهاب سنگ در فضای بین سیاره‌ای ساکن است. این شهاب سنگ به خاطر گردش زمین به جو برخورد می‌کند. سرعت نسبی شهاب سنگ و زمین ۳۰ کیلومتر بر ثانیه است. جنس این شهاب سنگ نیز از جنس سیلیس معمولی (خاک) با ظرفیت گرمایی متوسط $800\ J/kg.K$ است. به دلیل اصطکاک زیاد جو، تمام انرژی جنبشی جسم به گرما تبدیل می‌شود. دمای شهاب سنگ در هنگام برخورد به جو چقدر است؟

۱) اطلاعات مسئله کافی نیست ۲) ۵۰۰۰ کلوین
۳) ۵۰۰۰۰ کلوین ۴) ۵۰۰۰۰۰ کلوین

۳۰- خورشید علاوه بر تابش نور (امواج الکترومغناطیسی) ذراتی را نیز از خود تابش می‌کند که به بادهای خورشیدی موسومند. یک پروتون با انرژی جنبشی ۱۰ میلیون الکترون ولت ($K=10\ MeV$) پس از چه مدتی به سطح زمین می‌رسد.

۱) ۸ دقیقه ۲) ۱ ساعت ۳) ۳ ساعت ۴) ۳ روز

۳۱- دو خوشه‌ی کروی به دور مرکز کهکشان راه شیری در مدارهایی دایره‌ای در حرکت هستند. در نمودار زیر تغییرات زمانی جرم این خوشه‌ها داده شده است. کدام گزینه صحیح است؟



۱) خوشه‌ی (۱) در فاصله‌ی ۱۰ کیلوپارسک و خوشه‌ی (۲) در فاصله‌ی ۵۰ کیلوپارسک از مرکز کهکشان قرار دارند.
۲) خوشه‌ی (۱) در فاصله‌ی ۵۰ کیلوپارسک و خوشه‌ی (۲) در فاصله‌ی ۱۰ کیلوپارسک از مرکز کهکشان قرار دارند.
۳) تغییرات جرم خوشه به فاصله از مرکز کهکشان بستگی ندارد و ناشی از عامل دیگری است.
۴) هر دو خوشه در فاصله‌ی یکسانی از مرکز کهکشان هستند ولی جرم اولیه‌ی متفاوتی داشته‌اند.

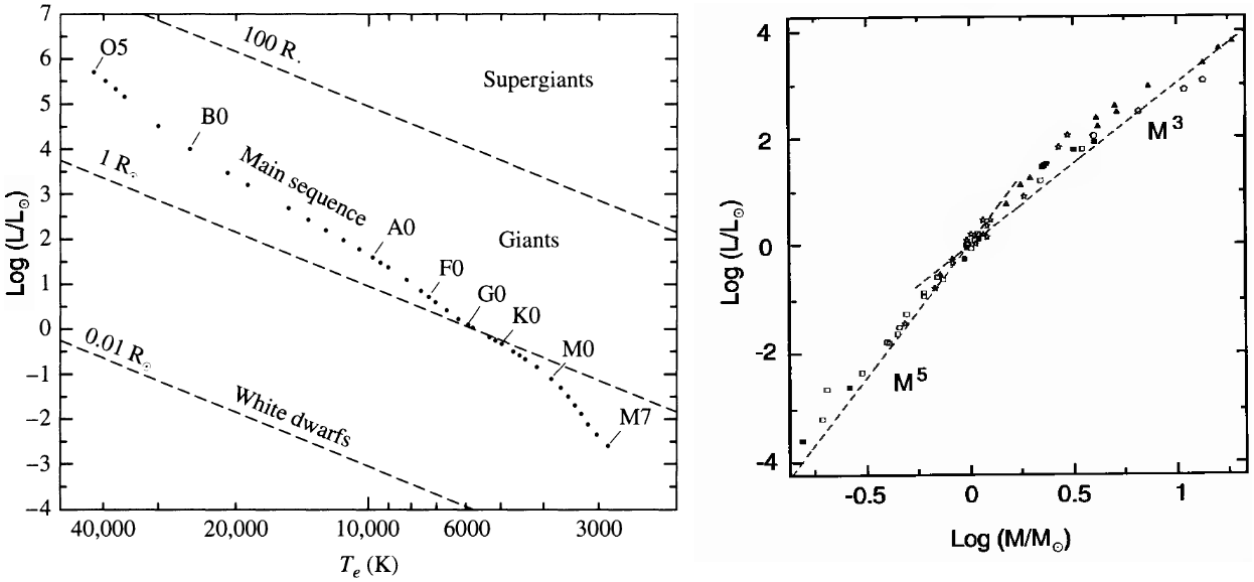
۳۲- از اندازه گیری خطوط نشری در مرکز کهکشان $M87$ توسط تلسکوپ فضایی هابل، سرعت مداری ستاره‌ها در فاصله‌ی $0.1''$ ثانیه‌ی قوسی از مرکز کهکشان، تقریبا ۱۰۰۰ کیلومتر بر ثانیه به دست آمده است. با فرض اینکه مدول فاصله‌ی این کهکشان $(m-M)=31$ باشد، جرم سیاهچاله‌ی مرکزی که در مرکز این کهکشان قرار دارد به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۱) ۲×۱۰^{۶} ۲) ۵×۱۰^{۷} ۳) ۲×۱۰^{۹} ۴) ۵×۱۰^{۱۰}

۳۳- در مواردی که نیاز به رصد خورشید برای منجمان آماتور وجود دارد؛ مثل گذر زهره، خورشید گرفتگی‌ها، مشاهده‌ی لک‌های بزرگ خورشید و مواردی از این دست، پیشنهاد می‌شود که حتی با فیلتر هم به خورشید نگاه نکنیم. در این موارد پیشنهاد می‌شود که از یک روزنه‌ی کوچک استفاده کنید و تصویر خورشید را روی یک پرده بی‌اندازید. اگر گذر زهره را از این طریق رصد کنیم و فاصله‌ی روزنه از پرده نیز ۲ متر باشد پهنای سایه‌ی زهره روی پرده چند میلیمتر خواهد بود.

۱) ۰/۵ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۲۰

۳۴- به ترتیب چگالی ستاره‌های $B0$ و $M7$ بر حسب چگالی آب به کدام گزینه نزدیک‌تر است.



۱) ۰٫۲ و ۵۰ ۲) ۰٫۵ و ۲۰ ۳) ۰٫۲ و ۲۰ ۴) ۰٫۵ و ۵۰

۳۵- در اثر اصطکاک جذر و مد دریا، شعاع مدار حرکت ماه به دور زمین، با سرعت چندین سانتیمتر بر سال افزایش می‌یابد. در این صورت:

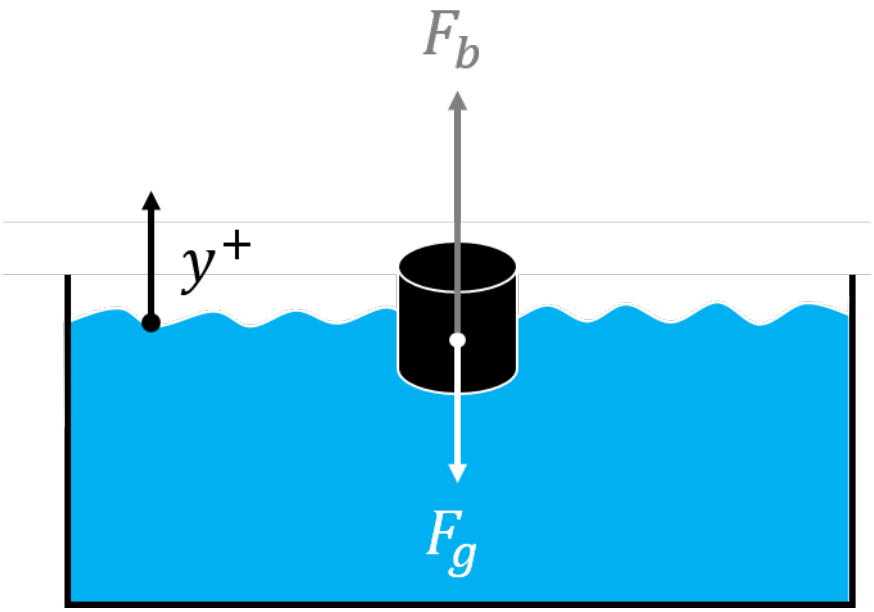
۱) تکانه‌ی زاویه‌ای ماه ثابت می‌ماند زیرا سرعت آن کاهش می‌یابد.
۲) تکانه‌ی زاویه‌ای ماه ثابت می‌ماند اما انرژی کل آن افزایش می‌یابد.
۳) تکانه‌ی زاویه‌ای و انرژی کل ماه افزایش می‌یابد.
۴) تکانه‌ی زاویه‌ای و انرژی کل ماه کاهش می‌یابد.

به نام خدا

پاسخنامه تشریحی
یازدهمین آزمون مرحله اول
المپیاد نجوم و اخترفیزیک

۱. گزینه ۴

در صورتی که استوانه مقداری در آب فرو رفته باشد، توسّط آب به آن نیروی شناوری وارد خواهد شد که برایند این نیرو و نیروی گرانش، موجب حرکت استوانه خواهد شد. برایند نیروها چنین به دست می‌آید:



شکل ۱: مسئله ۱

$$\sum F = F_b - F_g = m_w g - mg = \rho V_w g - K\rho V g$$

$$\Rightarrow \sum F = \rho A(L-y)g - K\rho ALg$$

که در آن A سطح مقطع استوانه، L طول استوانه و y مکان لبه‌ی بالایی استوانه است. m_w جرم معادل آب و m جرم استوانه است. طبق قانون دوّم نیوتون:

$$\sum F = m\ddot{y} \Rightarrow \rho A(L-y)g - K\rho ALg = K\rho AL\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{Lg - yg - KLg}{KL}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{g}{KL}y + (g - \frac{g}{K}) = 0$$

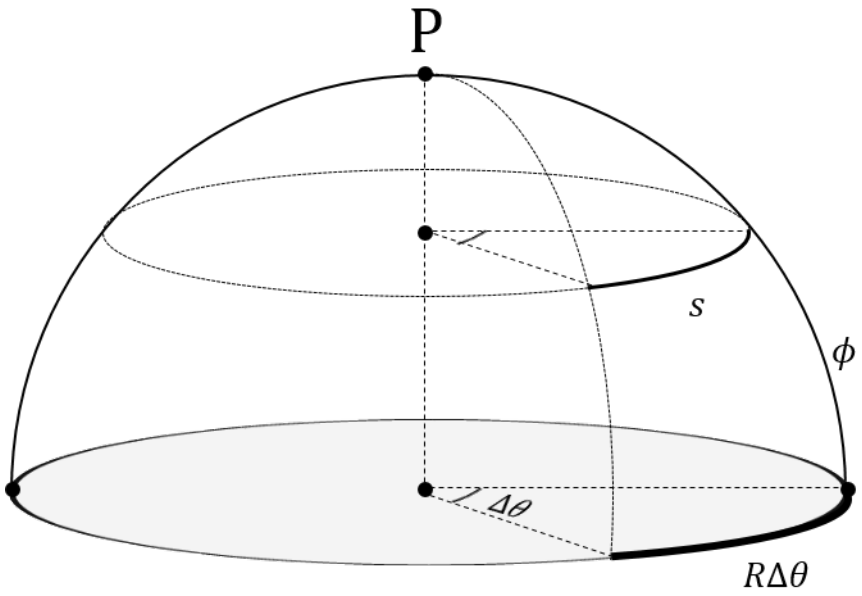
در نتیجه معادله‌ی حرکت استوانه به صورت یک حرکت نوسانی ساده خواهد بود. برای این

حرکت، بسامد زاویه‌ای برابر با $\omega = \sqrt{\frac{g}{KL}}$ است.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{KL}{g}}$$

۲. گزینه ۴

خطایی که ۱ ثانیه در تعیین طول جغرافیایی ایجاد می‌کند، برابر با مقداری جابه‌جایی ناظر بر اثر حرکت وضعی زمین است. طول یک کمان صغیره که در عرض جغرافیایی Φ قرار دارد، این گونه به دست می‌آید:



شکل ۲: مسئله ۲

$$s = R\cos\Phi\Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \omega\Delta t$$

$$\omega = \frac{2\pi}{86164}s^{-1} \Rightarrow s = 3.78 \times 10^2 m$$

$$\Rightarrow s \approx 381m$$

۳. گزینه ۳

در این سوال فرض می‌کنیم انرژی و تکانه مداری ثابت هستند. (جرم ستاره ناگهان ناپدید شده.

بنابراین می‌توان فرض کرد انرژی پایسته است.) سرعت سیاره در حضیض مداری (قبل از ناپدید شدن جرم ستاره) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{GM}{1AU}}$$

پس از ناپدید شدن جرم، جرم ستاره برابر است با:

$$M' = M(1 - \frac{x}{100})$$

سرعت فرار سیاره در این زمان عبارت است از:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM'}{r}} = \sqrt{\frac{2GM(1-\frac{x}{100})}{a(1-e)}} = \sqrt{\frac{GM}{1AU}} \times \sqrt{\frac{(1-\frac{x}{100})}{0.4}}$$

برای فرار سیاره از گرانش ستاره، باید سرعت آن بعد از ناپدید شدن جرم، برابر (یا بیشتر از) سرعت فرار باشد. پایستگی جرم ایجاب می‌کند سرعت اولیه و ثانویه سیاره برابر باشد. پس باید:

$$\frac{1-\frac{x}{100}}{0.4} = \frac{3}{2} \Longrightarrow x = 40$$

۴. گزینه ۳

خورشید دقیقا در سمت الراس ناظر مکه قرار دارد. بنابراین میل آن برابر عرض مکه است. از طرفی زاویه ساعتی خورشید از دید ناظر تهران برابر اختلاف طول جغرافیایی مکه و تهران است. بنابراین می‌توانیم با حل مثلث $P\overset{\triangle}{Z}X$ برای ناظر تهران، ارتفاع خورشید در این لحظه را حساب کنیم:

$$\sin a = \sin \delta_\odot \sin \Phi_T + \cos \delta_\odot \cos \Phi_T \cos \Delta H$$

$$\sin a = \sin \Phi_M \sin \Phi_T + \cos \Phi_M \cos \Phi_T \cos \Delta L$$

$$a = 72.49^\circ$$

به این ترتیب طول سایه به دست می‌آید:

$$\tan a = \frac{H}{L} \Longrightarrow L = \frac{1m}{\tan 72.49^\circ} = 0.315m \approx 32cm$$

۵. گزینه ۳

حد قدر چشم یک انسان در شرایط ایده آل، حدودا برابر ۶ است. چون تمام ستاره‌های این خوشه قدر مطلق یکسانی دارند، قدر ظاهری آنها فقط به فاصله‌شان وابسته است. فاصله ستاره‌ای را پیدا می‌کنیم که قدر ظاهری آن ۶ است:

$$m - M = 5\log d - 5 \Longrightarrow d = 15.8$$

ستاره‌هایی که از این فاصله دورتر باشند، قابل دیدن نیستند. پس تعداد کل ستاره‌هایی که با چشم غیرمسلح دیده می‌شوند برابر است با:

$$N = n \times V = 10 \times \frac{4}{3}\pi d^3 = 165219$$

بنابراین جواب عدد ۱۷۰ است.

۶. گزینه ۱

ابتدا قدر مطلق در هر دو باند را محاسبه می‌کنیم:

$$M_v = 11.64\ , \quad M_I = 10.64$$

می‌دانیم رابطه زیر بین قدر مطلق و قدر ظاهری برقرار است:

$$m - M = 5\log(\frac{d}{10}) + A \Longrightarrow A = m - M - 5\log(\frac{d}{10})$$

رابطه بالا را برای هر دو باند می‌نویسیم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{A_I}{A_v} = 0.6 = \frac{m_I - M_I - 5\log(\frac{d}{10})}{m_v - M_v - 5\log(\frac{d}{10})}$$

با انجام محاسبات فاصله به دست می‌آید:

$$d = 8130pc \approx 8kpc$$

۷. این سوال، حذف شد.

۸. گزینه ۲

اگر فرض کنیم تنها نیرویی که بر حرکت این فضاپیما تاثیر می‌گذارد، گرانش خورشید است، باید محاسبه کنیم شتاب گرانش خورشید در چه فاصله ای از آن برابر $10^{-10}\frac{m}{s^2}$ می‌شود:

$$a = \frac{GM_\odot}{d^2} = 10^{-10} \Longrightarrow d = 1.15 \times 10^{12} km$$

چون فرض شده سرعت فضاپیما ثابت است (شتاب گرانش خورشید قابل صرف نظر کردن است)، باید مدت زمانی که طول می‌کشد تا فضاپیما از زمین به فاصله d از خورشید می‌رسد حساب کنیم.

$$t = \frac{d - d_0}{v} \approx \frac{1.15 \times 10^{12}}{61000} = 18.88 \times 10^6 h = 2154 yr$$

با اضافه کردن این مقدار به تاریخ پرتاب وویجر، زمان مورد نظر سال **۳۵۱۰** به دست می‌آید که به گزینه **۳۵۲۰** نزدیک‌تر است.

۹. گزینه ۴

ابتدا روشنایی یک منبع با قدر **۱۵** را حساب می‌کنیم.

$$m - m_\odot = -2.5 \log(\frac{b}{b_\odot}) \Longrightarrow b = 2.86 \times 10^{-14} \frac{W}{m^2}$$

این مقدار همان روشنایی سطحی یک ثانیه قوس مربع از مرکز کهکشان مذکور است. فرض می‌کنیم مرکز این کهکشان از دید ناظری نامعلوم زاویه فضایی Ω را پوشش می‌دهد و در فاصله d از آن قرار دارد. (در ادامه از این دو مقدار استفاده می‌کنیم ولی از معادلات حذف خواهند شد!) روشنایی کل جسم مذکور برابر است با:

$$b_t = b \times \Omega \times 206265^2$$

مقدار ثابتی که در عبارت بالا ضرب شده، به خاطر تبدیل استرادیان به ثانیه قوس مربع است!

حال درخشندگی ذاتی این جسم را حساب می‌کنیم:

$$L = 4\pi d^2 b_t = 4\pi^2 b\Omega \times 206265^2 = 4\pi \times 206265^2 \times b \times A$$

در عبارت بالا از این نکته استفاده کردیم که $A = \Omega d^2$ که در اینجا A برحسب متر مربع است.

بنابراین روشنایی سطحی معادل به دست می‌آید:

$$\frac{L}{L_\odot A} = \frac{4\pi \times 206265^2 \times bA}{L_\odot \times (\frac{A}{(206265 \times 1.5 \times 10^{11})^2})} = 38000$$

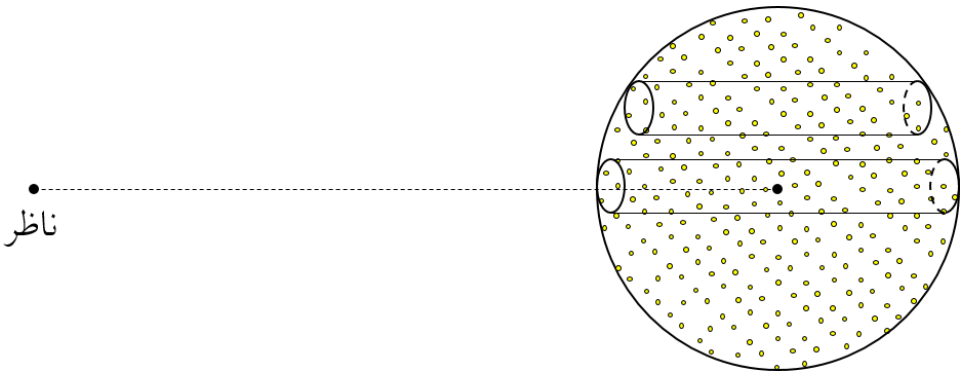
که به گزینه ۳۲۰۰۰ نزدیک‌تر است.

۱۰. گزینه ۳

دمای ستاره مورد نظر زیاد است. بنابراین نمی‌تواند غول سرخ باشد. از طرفی دمای ستاره‌های رشته اصلی معمولا اینقدر بالا نیست پس این ستاره، یک کوتوله سفید است.

۱۱. گزینه ۱

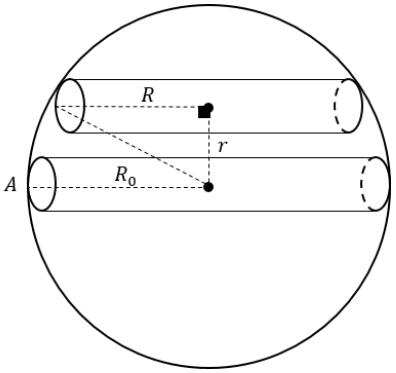
برای محاسبه‌ی چگالی سطحی، کافی است که المان سطح A را به اندازه‌ی واحد روی خوشه در نظر بگیریم و تعداد ستارگان درون این المان را محاسبه کنیم.



شکل ۳: مسئله ۱۱

از آن‌جا که با حرکت به سمت لبه‌های خوشه، طول خطّ دید (ستارگانی که در راستای خط دید قرار می‌گیرند) کاهش می‌یابد، تعداد ستارگان کمتری از آن سطح مشاهده خواهند شد. با توجّه

به ثابت بودن چگالی و فاصله‌ی d از آن:



شکل ۴: مسئله ۱۱

$$\Sigma = 2AR = 2A\sqrt{R_0^2 - r^2}\ ,\ r = \alpha d$$

$$\Sigma = 2A\sqrt{R_0^2 - \frac{\alpha^2}{d^2}}$$

با توجّه به این که شکل تابع، یک تابع رادیکالی قرینه شده نسبت به محور y است، به گزینه‌ی ۱ می‌رسیم.

۱۲. گزینه ۱

ابتدا d_I را حساب می‌کنیم. چون ستاره از رده طیفی خورشید است، قدر مطلق آن برابر $M_\odot$ است.

$$m_t - M_\odot = 5\log(\frac{d_1}{10}) \Rightarrow d_1 = 31.6pc$$

چون ستاره دوتایی بوده، قدر ظاهری آن، قدر مجموعه بوده است. پس باید قدر ظاهری هر مولفه را به دست آوریم. می‌دانیم $b_t = 2b_0$ بنابراین:

$$m_0 - m_t = -2.5\log(\frac{b_0}{b_t}) = 2.5\log 2 \Rightarrow m_0 = 7.97$$

بنابراین فاصله واقعی به دست می‌آید:

$$m_0 - M_\odot = 5\log(\frac{d_2}{10}) \Rightarrow d_2 = 44.6$$

بنابراین اختلاف فاصله‌ها به دست می‌آید:

$$d_2 - d_1 = 13pc$$

۱۳. گزینه ۲

انرژی تلف شده در حین سقوط قطرات باران از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q = mgh - \frac{1}{2}mv^2$$

جرم کل قطرات باران برابر است با:

$$m = 100km^2 \times 10mm \times 1000\frac{kg}{m^3} = 10^9 kg$$

بنابراین:

$$Q = 10^{13} - \frac{1}{2} \times 10^9 \times 49 \approx 10^{13} J$$

از طرفی برای هوای محیط رابطه زیر را داریم:

$$Q = MC\Delta T$$

که جرم کل هوا برابر است با:

$$M = 100km^2 \times 1km \times 1\frac{kg}{m^3} = 10^{11} kg$$

بنابراین تغییر دمای ایجاد شده برابر است با:

$$\Delta T = \frac{Q}{MC} = 0.1k$$

۱۴. گزینه ۳

ابتدا تعداد قطرات باران در سطح کل کشور را پیدا می‌کنیم: (هر میلی لیتر یک سانتی متر مکعب است)

$$N = (16\frac{\#}{mL}) \times (1mm \times 1648195km^2) = 2.64 \times 10^{16}$$

حالا جرم هر قطره باران را به دست می‌آوریم:

$$m = \rho V = 6.25 \times 10^{-2} gr$$

بنابراین تعداد مول‌های داخل هر قطره برابر است با:

$$n = \frac{6.25 \times 10^{-2}}{18 \frac{gr}{mol}} = 3.47 \times 10^{-3} mol$$

و در نهایت تعداد مولکول‌های آب در هر قطره به دست می‌آید:

$$N' = N_A \times n = 2.09 \times 10^{21}$$

به این ترتیب:

$$\frac{N}{N'} = 10^{-5}$$

۱۵. گزینه ۲

ابتدا تعداد هلیوم‌های تولید شده در طول عمر ستاره را حساب می‌کنیم. برای این کار، کل انرژی تابشی ستاره در مدت عمرش را بر انرژی تولید شده در اثر تولید یک هلیوم تقسیم می‌کنیم:

$$N = \frac{L \times T}{\epsilon} = \frac{11 L_\odot \times 1.7 Gyr}{25 MeV} = 5.67 \times 10^{55}$$

حالا تعداد مول‌های هلیوم تولید شده را حساب می‌کنیم:

$$n = \frac{N}{N_A} = 9.4 \times 10^{31} mol$$

حالا جرم کل هلیوم‌ها به دست می‌آید:

$$m = nM = 3.77 \times 10^{32} \approx 0.18 M_\odot$$

۱۶. گزینه ۱

در اثر بادهای ستاره‌ای، جرم ستاره کاهش می‌یابد. بنابراین فشار لایه‌های بالایی روی هسته (ناشی از جرم بالای هسته) کاهش می‌یابد و برای برقراری تعادل هیدرواستاتیک، **دما کاهش**

می‌یابد. وقتی دما کاهش پیدا کند، آهنگ مصرف جرم در هسته کاهش یافته و **عمر ستاره افزایش** می‌یابد.

۱۷. گزینه ۳

زمان رمبش یک ساختار با چگالی آن به صورت زیر رابطه دارد:

$$t_{ff} \propto \sqrt{\frac{1}{G\rho}}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = \sqrt{\frac{\frac{10^{12}}{(10^5 pc)^3}}{\frac{10^{15}}{(10^7 pc)^3}}} = 0.032$$

۱۸. گزینه ۴

می‌دانیم در اوایل تشکیل جهان، عالم تابش غالب بوده است. سپس ماده غالب شده و هم اکنون انرژی تاریک غالب می‌باشد. بعلاوه می‌دانیم قرمز گرایی‌های زیاد مربوط به زمان‌های اولیه کیهان است. همچنین قرمز گرایی برای زمان حال برابر صفر است. پس منحنی شماره ۳ که در زمان حال غالب است، مربوط به انرژی تاریک است. به همین ترتیب منحنی شماره ۱ مربوط به تابش و منحنی ۲ مربوط به ماده است.

۱۹. گزینه ۱

ابتدا در مثلث بین (پاریس-مکه-قطب شمال) فاصله زاویه‌ای (مکه-پاریس) را حساب می‌کنیم:

$$\cos MP = \sin \Phi_M \sin \Phi_P + \cos \Phi_M \cos \Phi_P \cos \Delta L$$

$$MP = 40.44^\circ$$

حال دوباره با استفاده از قاعده کسینوس‌ها، زاویه P را حساب می‌کنیم:

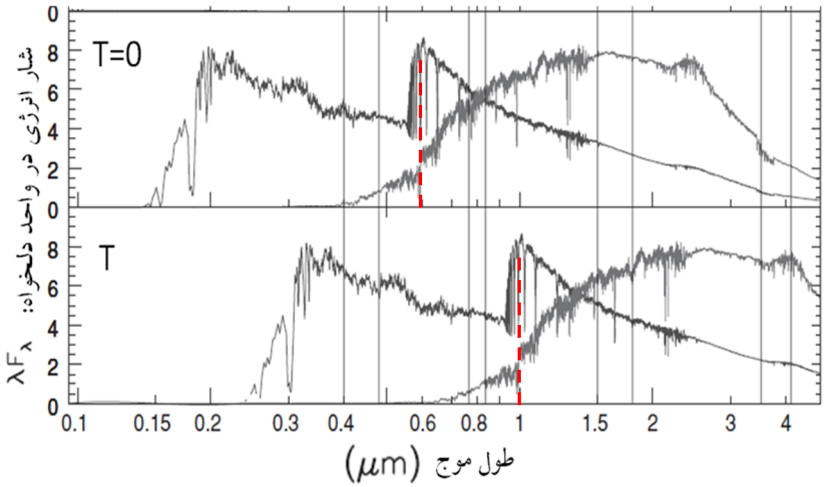
$$\sin \Phi_M = \sin \Phi_P \cos MP + \cos \Phi_P \sin MP \cos P$$

$$P = 119.16^\circ$$

این زاویه‌ای است که جهت قبله با سمت شمال می‌سازد. زاویه مورد نظر سوال مکمل این زاویه یعنی حدودا ۶۰ درجه و به سمت شرق است.

۲۰. گزینه ۳

در صورتی که دستگاه $T = 0$ را دستگاه سکون در نظر بگیریم و قرمزگرایی را نسبت به آن حساب کنیم:



شکل ۵: مسئله ۲۰

$$\lambda = 1\mu m \ , \ \lambda_0 = 0.6\mu m$$

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0.67$$

براي z های نسبتاً کوچک می‌توانیم از رابطه‌ی قرمزگرایی داپلر استفاده کنیم و سرعت شعاعی را بیابیم.

$$v = cz \Rightarrow v = 2 \times 10^5 \frac{km}{s}$$

با استفاده از رابطه‌ی انبساط هابلی:

$$v = H_0 d \Rightarrow d = \frac{v}{H_0} = 2.73 \times 10^3 Mpc \Rightarrow d \approx 3Gpc$$

۲۱. گزینه ۲

دمای تعادل سیاره با فرض اینکه آن را جسم سیاه در نظر بگیریم، از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$T = T_{\odot}\sqrt{\frac{R_{\odot}}{2d}\sqrt{1-A}}$$

که d فاصله سیاره تا خورشید است (که ما فرض می‌کنیم ثابت است). بنابراین:

$$T^4 \propto T_{\odot}^4 R_{\odot}^2 \Rightarrow T^4 \propto L_{\odot}$$

پس با ۱.۵ برابر شدن درخشندگی خورشید، دمای زمین $\sqrt[4]{1.5} = 1.1$ برابر خواهد شد.

۲۲. گزینه ۱

قانون دوم کپلر بیان می‌کند مساحت جاروب شده توسط بردار مکان سیاره، متناسب است با زمان طی همان مسیر. بنابراین:

$$\frac{T_{summer}}{T_{winter}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{BAD}}}{S_{\overset{\triangle}{DPB}}}$$

مساحت $\overset{\triangle}{BAD}$ برابر است با نصف مساحت بیضی بعلاوه مساحت مثلث $\overset{\triangle}{PFB}$ و به طور مشابه، مساحت $\overset{\triangle}{DPB}$ برابر است با نصف مساحت بیضی منهای مساحت مثلث $\overset{\triangle}{PFB}$. بنابراین:

$$S_{\overset{\triangle}{BAD}} = \frac{\pi ab}{2} + eab \ , \ S_{\overset{\triangle}{DPB}} = \frac{\pi ab}{2} - eab$$

$$\frac{T_{summer}}{T_{winter}} = \frac{186}{179} = \frac{\frac{\pi}{2}+e}{\frac{\pi}{2}-e} \Rightarrow e = 0.03$$

توجه کنید که مقدار واقعی خروج از مرکز زمین به عدد ۰.۰۱۷ نزدیک تر است. اما در این سوال عدد حاصل از محاسبات جواب صحیح است!

۲۳. گزینه ۲

چون مسئله حداقل قطر دهانه را خواسته، پس باید حداقل فاصله ماهواره تا سطح زمین را در نظر بگیریم که برابر است با:

$$d = r - R_{\oplus} = 420km$$

پهنای شانه یک انسان عادی تقریبا ۰.۵ متر است. بنابراین از دید این ماهواره، اندازه زاویه‌ای پهنای شانه انسان برابر است با:

$$\theta = \frac{L}{d} = \frac{0.5}{420 \times 10^3} = 1.19 \times 10^{-6} rad$$

رابطه توان تفکیک تلسکوپ به صورت زیر است:

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

برای اینکه تلسکوپ بتواند جسمی را تفکیک کند، اندازه زاویه‌ای آن حداقل باید برابر توان تفکیک آن باشد. طول موج نور مرئی ۵۵۰ نانومتر است. بنابراین:

$$1.22 \frac{550 \times 10^{-9}}{D} = 1.19 \times 10^{-6} \Rightarrow D = 0.56m$$

که گزینه ۵۰ سانتی متر صحیح است.

۲۴. گزینه ۴

برای عدسی‌های نازک، رابطه‌ای بین فاصله کانونی و شعاع انحنا وجود دارد که به شکل زیر است:

$$\frac{1}{F} = (n-1)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$

چون فرض شده شعاع انحنای دو طرف عدسی‌ها یکسان است، خواهیم داشت:

$$F = \frac{R}{2} \frac{1}{n-1}$$

فاصله کانونی دو عدسی به دست می‌آید:

$$F_{object} = 1.055m \ , \ F_{eye} = 0.11m$$

در تلسکوپ، باید کانون عدسی چشمی و شیئی روی هم قرار گیرد. پس فاصله دو عدسی باید برابر $F_o + F_e = 116cm$ باشد.

۲۵. گزینه ۱

دقیق نبودن عرض جغرافیایی سبب کاهش دقّت موقعیت‌یابی می‌شود، بر این مبنا، از آن‌جا که دقّت تعیین عرض جغرافیایی (فاصله‌ی میان کران بالا تا کران پایین میله‌ی خطا) برابر با $0.002°$ است، می‌توانیم مقدار دقّت موقعیت‌یابی را محاسبه کنیم:

$$s = R\theta_{(rad)} \Rightarrow \Delta s = R\Delta\theta$$

$$\Delta s = 2.22 \times 10^2 m \Rightarrow \Delta s = 220m$$

۲۶. گزینه ۲

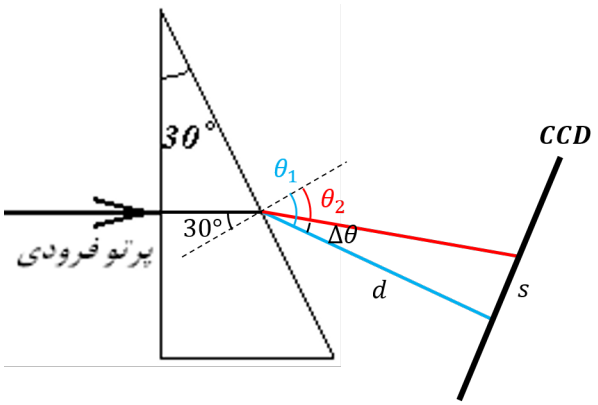
با یک تناسب ساده داریم:

$$\frac{\Delta_1}{D_1} = \frac{\Delta_2}{D_2} \Rightarrow \frac{0.1 \times 550 \times 10^{-9}}{3.4} = \frac{\Delta_2}{2 \times 6.38 \times 10^6}$$

$$\Delta_2 = 0.2m = 20cm$$

۲۷. گزینه ۳

با توجّه به تفاوت ضریب شکست‌ها بر اساس رابطه‌ی کوشی، میزان شکستِ دو پرتو متفاوت بوده و در نتیجه این دو پرتو هنگام خروج از منشور با یک‌دیگر زاویه‌ای می‌سازند. ابتدا ضریب شکست‌ها را با توجّه به رابطه‌ی کوشی محاسبه می‌کنیم:



شکل ۶: مسئله ۲۷

$$n_1 = 1.767 \ , \ n_2 = 1.728$$

حال، کافی است براي محاسبه‌ی $\Delta\theta$، θ_1 و θ_2 را محاسبه کرده و سپس اختلاف آن‌ها را به‌دست آوریم.

$$n_1 \sin 30^\circ = n_0 \sin\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = 62.07^\circ$$

$$n_2 \sin 30^\circ = n_0 \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = 62.04^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = 4.937 \times 10^{-4} rad$$

اگر بخواهیم این ۲ پرتو روی ۲ پیکسل متفاوت بیفتند، بایستی طول s از اندازه‌ی یک پیکسل CCD بیشتر باشد. در حالت حدّی $s = 10\mu m$ و با توجّه به کوچک بودن $\Delta\theta$:

$$\theta = \frac{s}{d} \Rightarrow d = \frac{s}{\Delta\theta} \approx 2cm$$

۲۸. گزینه ۴

تغییرات در دوره‌ی تناوب پالس به سبب انتقال داپلری ناشی از حرکت انتقالی تپ‌اختر ایجاد می‌شود.

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\nu_0}} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \Delta P = \frac{v_{r,max}}{c} \times P_0 \qquad (۱)$$

با توجّه به دایروی بودن مدارها و نیز دیده شدن آن‌ها از لبه، $v_{r,max}$ برابر با سرعت مداری خواهد بود. برای محاسبه‌ی سرعت مداری:

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{P} r \ , \ v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow r = \frac{GM}{v^2}$$

$$v = \frac{2\pi}{P}\frac{GM}{v^2} \Rightarrow v = \sqrt[3]{(\frac{2\pi GM}{P})}$$

$$\Rightarrow v = 350\frac{km}{s}$$

با استفاده از رابطه‌ی ۱ خواهیم داشت:

$$\Delta P = 0.002s \approx 0.001s$$

براي محاسبه‌ی دقیق‌تر، بایستی رابطه‌ی سرعت بر حسب شعاع مداری را با نوشتن قانون دوّم نیوتون به دست آوریم و با توجّه به آن مسئله را حل کنیم.

۲۹. گزینه ۴

با فرض تبدیل شدن تمام انرژي جنبشی شهاب‌سنگ به گرما:

$$\Delta K = \Delta Q \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mc\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{v^2}{2c}$$

$$\Rightarrow \Delta T \approx 500000K$$

۳۰. گزینه ۲

ابتدا با توجّه به انرژي جنبشی، سرعت ذرّات را می‌یابیم:

$$K = \frac{1}{2}m_p v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m_p}} = 4.4 \times 10^7 \frac{m}{s}$$

مدّت زمان طی شدن شعاع مداری زمین با این سرعت این گونه به دست می‌آید:

$$t = \frac{r_\oplus}{v} = 3.4 \times 10^3 s \approx 1h$$

۳۱. گزینه ۲

هر چه خوشه به مرکز کهکشان نزدیک‌تر باشد، ستارگان کهکشان اثر بیشتری بر توزیع سرعت ستارگان درون خوشه می‌گذارند و باعث تسریع فرایند واهلش می‌شوند. در نتیجه خوشه سریع‌تر تبخیر می‌شود. (جرم آن کمتر می‌شود.)

۳۲. گزینه ۳

ابتدا شعاع مداری ستاره را محاسبه می‌کنیم. این کار مستلزم محاسبه‌ی فاصله‌ی خوشه و سپس استفاده از رابطه‌ی زاویه‌ی کوچک است:

$$m - M = 5\log d - 5 \Rightarrow d = 10^{\frac{m-M+5}{5}} = 1.58 \times 10^7 pc$$

$$r = \theta d = 7.68 pc$$

با توجّه به رابطه‌ی سرعت در مدارهای دایروی، می‌توانیم جرم درون شعاع r را محاسبه کنیم:

$$v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow M = 3.56 \times 10^{39} kg$$

$$M = 1.79 \times 10^9 M_\odot \approx 2 \times 10^9 M_\odot$$

از آن‌جا که شعاع مداری بسیار کوچک است، کسر بسیار زیادی از جرم درون شعاع r متعلّق به سیاه‌چاله بوده و ستارگان سهم اندکی در این مقدار دارند.

۳۳. گزینه ۱

از رابطه‌ی مقیاس تصویر استفاده می‌کنیم:

$$\tan\theta \approx \theta_{(rad)} = \frac{s}{F} \Rightarrow s = \theta F$$

θ قطر زاویه‌ای زحل و F فاصله‌ی روزنه تا پرده است.

$$\theta = \frac{2R_v}{d} = \frac{2R_v}{d_\oplus - d_v} \Rightarrow \theta = 2.88 \times 10^{-4} rad$$

$$\Rightarrow s = 5.76 \times 10^{-4} m \approx 0.5 mm$$

۳۴. گزینه ۱

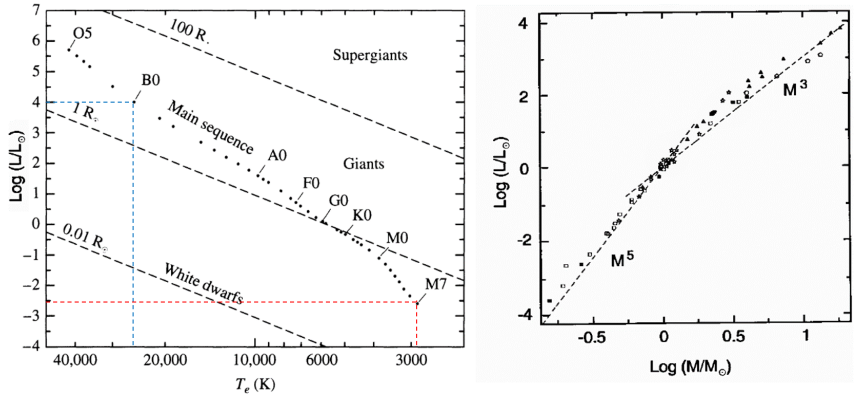
با توجّه به رده‌ی طیفی ستارگان می‌توان از نمودار $H - R$ (سمت چپ) درخشندگی و دمای مؤثّر ستارگان را استخراج کرد و سپس شعاع را از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}}$$

$$L_{B0} = 10^4 L_\odot \ , \ L_{M7} = 10^{-2.5} L_\odot$$

$$T_{B0} = 25700K \ , \ T_{M7} = 2900K$$

$$\Rightarrow R_{B0} = 3.52 \times 10^8 m \ , \ R_{M7} = 1.56 \times 10^8 m$$



شکل ۷: مسئله ۳۴

هم‌چنین امکان محاسبه‌ی جرم با توجّه به رابطه‌ی جرم-درخشندگی وجود دارد. برای این کار لازم است از نمودار درخشندگی-جرم (سمت راست) استفاده کرده و نوع رابطه‌ی جرم درخشندگی را بیابیم.

$$L \propto M^\alpha \Rightarrow M = (\frac{L}{L_\odot})^{\frac{1}{\alpha}} M_\odot$$

برای ستاره‌ی $B0$ رابطه به صورت $L \propto M^3$ و برای ستاره‌ی $M7$ رابطه به صورت $L \propto M^5$ است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$M_{B0} = 4.29 \times 10^{31} kg \ , \ M_{M7} = 6.29 \times 10^{29} kg$$

چگالی متوسّط را این گونه می‌توان به دست آورد:

$$\overline{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$\overline{\rho}_{B0} = 2.34 \times 10^2 \frac{kg}{m^3} \ , \ \overline{\rho}_{M7} = 3.94 \times 10^4 \frac{kg}{m^3}$$

با توجّه به این که چگالی آب $\rho_0 = 1000 \frac{kg}{m^3}$ است:

$$\frac{\overline{\rho}_{B0}}{\rho_0} \approx 0.2 \ , \ \frac{\overline{\rho}_{M7}}{\rho_0} \approx 50$$

۳۵. گزینه ۳

می‌دانیم گرانش ماه بر اثر تفاوت شتاب گرانشی میان سطح نزدیک زمین به ماه و سطح دور زمین از ماه، پدیده‌ی جزر و مد به وجود می‌آید. به علّت چرخش سریع‌تر زمین به دور خود از گردش ماه به دور زمین، نیرویی از سمت پوسته‌ی زمین به آب اقیانوس وارد شده و آن را در جهت چرخش زمین حرکت می‌دهد. ایجاد این نیرو و صفر بودن سرعت نسبی در نقطه‌ی تماس آب با پوسته‌ی زمین، شرایطی را به وجود می‌آورد که در آن انرژی جنبشی چرخشی زمین به گرما تبدیل شده و تکانه‌ی زاویه‌ای زمین از دست می‌رود.

با توجّه به عدم وجود گشتاور خارجی بر سیستم زمین-ماه و پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای سیستم، **این تکانه‌ی از دست رفته به ماه انتقال می‌یابد.**

از آن‌جا که زمین قلّه‌ی مد را با خود چرخانده است، راستاي قلّه در راستای خطّالمرکزین زمین و ماه نخواهد بود، افزایش تکانه‌ی زاویه‌ای خود را به صورت افزایش سرعت نشان نخواهد داد؛ بلکه این امر سبب اعمال گشتاور بر ماه و دور شدن آن از زمین خواهد شد. با دور شدن ماه از زمین، **انرژی مداری آن نیز افزایش خواهد یافت.**