به نام پروردگار مهربانی‌ها

اهمیت و نقش حساب دیفرانسیل و انتگرال

در این سوال می‌خواهیم اثری از معادلات دیفرانسیل را بررسی کنیم. می‌دانیم که نیروی عکس مجذور فاصله‌ی حاکم بر طبیعت، جهان هستی را به شکل حاضر درآورده‌است. این نیروست که باعث شده است شکل مدار سیارات بیضوی باشد. علت آن هم می‌دانیم که در حل معادله دیفرانسیل حرکت نهفته است. حال قرار است شما خود را در زمان نیوتون فرض کنید و خود را اصلاً جای نیوتون بگذارید. (البته نیوتونی که هنوز حساب دیفرانسیل را ابداع نکرده است!) از طرفی تنها چیزی هم که در دست دارید قانون جهانی گرانش است. فرض کنید سیاره‌ای با جرم m می‌خواهد دور ستاره‌ای با جرم M(بسیار بزرگتر از m) بچرخد. به شما سرعت اولیه $\vec{v}_0$ و مکان اولیه $\vec{r}_0$ از سیاره نسبت به ستاره و قانون نیوتون $\vec{F} = m\vec{a}$ (البته عملاً در این معادله حساب دیفرانسیل داریم ولی شما ندید بگیرید! فرض کنید فقط با مفهوم فیزیکی شتاب آشنایی داریم) و قانون جهانی گرانش $\vec{F}_G = \frac{GMm}{r^2}$ را می‌دهند و می‌گویند با این‌ها حرکات بعدی سیاره را پیش‌بینی کنید. با دو روش الف و ب مسأله را حل کنید. دقت کنید که این مسأله را می‌توانید هم با کاغذ نمودار (شاید مجبور شوید چند کاغذ را به هم بچسبانید) و هم با استفاده از نرم‌افزارهای برنامه‌نویسی‌ای که قادرند نمودار بکشند (مثل MATLAB) حل کنید. اگر با MATLAB یا نرم‌افزاری با قابلیت تعریف تابع مسأله را حل می‌کنید، تابعی بنویسید که بردار سرعت و مکان دل‌خواه به آن بدهیم و او شکل مدار را بکشد. اگر هم که با دست حل می‌کنید می‌توانید سرعت اولیه را $20\,\frac{km}{s}$ و فاصله اولیه را $1Au$ بگیرید و بردار مکان وسرعت را در لحظه اول عمود بگیرید.جرم ستاره را جرم خورشید و جرم سیاره را جرم زمین بگیرید.

الف) یک راه این است که زمان‌های دل‌خواه و کوچک Δt را طوری در نظر بگیرید که درطی آن زمان بردار شتاب و سرعت عوض نشود و بردارهای مکان و سرعت جدید را بعد از این زمان بیابید و همین طور این کار را تکرار کنید تا مدار سیاره را رسم کنید.

ب) راه دوم این است که بگویید سیاره اول کار داشته با سرعت $\vec{v}$ حرکت می‌کرده است و اگر ستاره نبود همان مسیر خط راست اولیه را می‌رفت ولی حال که ستاره است باعث می‌شود که وقتی سیاره مسافت $\vec{v}\Delta t$ را حرکت کند به اندازه $\frac{1}{2}g\Delta t^2$ هم به سمت ستاره سقوط کند و بنابراین بردار جدید حرکت سیاره نمی‌شود $\vec{v}\Delta t$ بلکه $\vec{v}\Delta t + \frac{1}{2}\vec{g}\Delta t^2$ می‌شود و انگار سیاره روی این بردار حرکت می‌کرده از اول. برای لحظه‌ی بعدی بردار مکان جدید می‌شود به این صورت که سیاره داشته است روی بردار $\vec{v}\Delta t + \frac{1}{2}\vec{g}\Delta t^2$ حرکت می‌کرده است در زمان Δt حال که گرانش داریم باز نسبت به این بردار به اندازه $\frac{1}{2}\vec{g}'\Delta t^2$ به سمت ستاره انحراف داریم. دقت کنید که $\vec{g}$ و $\vec{g}'$ با هم فرق می‌کنند چون که هم سیاره به ستاره نزدیک‌تر شده است و هم نیرو از جهت دیگری دارد وارد می‌شود. همین طور الی‌آخر بردارهای مکان جدید را می‌سازیم.

ج) راه الف و ب را برای چندین دوره تناوب پشت سر هم حل کنید به طوری که همه‌ی این چند دوره تناوب در یک نمودار قابل مشاهده باشند.

د) آیا مدارها بیضی شد؟ آیا مدارها بسته شد؟ خصوصیات مدار حاصله (مثل نیم‌قطربزرگ و خروج از مرکز) را با خصوصیاتی که از تئوری محاسبه می‌شود مقایسه کنید.

ه) اگر می‌بینید بعد از چند دوره تناوب دارد اتفاقاتی سر بیضی مدار می‌افتد علت این وقایع را تفسیر کنید؛ هم برای الف هم ب.

و) اگر با دست حل می‌کنید و و این کار برای شما زمان‌بر است بسته به زمانی که می‌خواهید برای سؤال بگذارید Δt را کم کنید و باز مدار را به دو روش بکشید و ببینید اثر آن اتفاقات چه تغییری می‌کند. اگر هم که با کامپیوتر حل می‌کنید، قسمتی در تابع خود ایجاد کنید که به آن Δt را بدهیم و آن را به مرور کم و زیاد کنید و اثرات آن را در مدار ببینید.

ز) شکل‌هایی که با روش الف و ب می‌کشید بعد از چند دوره تناوب با هم فرق‌هایی پیدا می‌کنند و هر دو یک الگو را رعایت نمی‌کنند. سعی کنید علت تفاوت را توجیه کنید.

ح) اگر دستی حل می‌کنید و احیاناً حوصله زیاد دارید (!) مسئله بالا را به ازای سرعتی که مدار هذلولی شود هم حل کنید و اگر با رایانه حل می‌کنید که تابعی دارید که قابلیت تغییر سرعت و مکان اولیه هم دارد پس می‌توانید سریعاً شکل مدار را عوض کنید.

بدین ترتیب احتمالاً یکی از اهمیت‌ها و کاربردهای عملی حساب دیفرانسیل انتگرال برای شما روشن می‌شود. چیزی که اگر شما در زمان نیوتون بودید و آن را نمی‌دانستید و مسأله بالا را به شیوه‌های گفته شده حل می‌کردید و به نتایج می‌رسیدید، یحتمل فکر می‌کردید اثری جدید در حرکت سیارات کشف کرده‌اید! غافل از این که همه چیز در نکته ساده‌ای است که شما باید بعد از حل مسأله به آن پی ببرید.

در پناه حق موفق باشید.

عیدتون هم مبارک!