به نام آرامش بخش دلها

آزمون آزمایشی مرحله‌دوم

المپیاد نجوم و اخترفیزیک

نهمین تیم جمهوری اسلامی ایران در

المپیاد جهانی نجوم و اخترفیزیک

تعداد سوالات: 7 سوال

وقت پیشنهادی: 270 دقیقه

تذکرات:

- استفاده از ماشین حساب مهندسی که قابل برنامه‌ریزی نباشد، مجاز است.
- به هر کدام از سؤالات در برگه‌های جداگانه پاسخ دهید.
- نتایج آزمون را می توانید از طریق سایت نهمین تیم المپیاد جهانی نجوم، 9thioaa.ir پیگیری کنید.

ثوابت فیزیکی و نجومی

G ثابت جهانی گرانش	$6.67 \times 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$
σ ثابت استفان بولتزمن	$5.67 \times 10^{-8}\ Wm^{-2} K^4$
μ_0 گذردهی مغناطیسی خلأ	$4\pi \times 10^{-7}\ \frac{N}{A^2}$
k ثابت بولتزمن	$1.38 \times 10^{-23}\ Jk^{-1}$
h ثابت پلانک	$6.63 \times 10^{-34}\ Js$
c سرعت نور در خلأ	$3 \times 10^{8}\ ms^{-1}$
ly سال نوری	$9.46 \times 10^{15}\ m$
pc پارسک	$3.09 \times 10^{16}\ m$
AU واحد نجومی	$1.5 \times 10^{11}\ m$
$R_\odot$ شعاع خورشید	$6.96 \times 10^{8}\ m$
$R_\oplus$ شعاع زمین	$6.38 \times 10^{6}\ m$
$M_\odot$ جرم خورشید	$1.99 \times 10^{30}\ kg$
$M_\oplus$ جرم زمین	$5.97 \times 10^{24}\ kg$
قدر حدی چشم	6.5
قطر مردمک چشم	$6\ mm$
I لختی دورانی کره‌ای یکنواخت به جرم M شعاع R	$\frac{2}{5}MR^2$
u_B چگالی انرژی مغناطیسی	$\frac{B^2}{2\mu_0}$

راهنمایی:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int \frac{d(a^2+x^2)}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int x^{n-1}\,e^{(x^n)}\,dx = \frac{1}{n}\int e^{(x^n)}d(x^n)$$

سوال اول (40 نمره) :

فرض کنید یک تپ اختر با دوره تناوب 1 میلی‌ثانیه یافت شده است. نکته قابل توجه راجع به این ستاره این است که دارای میدان مغناطیسی بسیار قوی به اندازه 10^{10} تسلا است. فرض کنید در کل ستاره همین میدان را داشته باشیم و انرژی مغناطیسی به خاطر برخورد ذرات باردار به ذرات دیگر، به کل ذرات منتقل شود. هم‌چنین رفتار ذرات گاز را همواره مانند رسانا تصور کنید. شعاع این ستاره 11 کیلومتر است. اگر این ستاره از رمبش یک ابر هیدروژنی مولکولی کروی با دمای 10 کلوین و شعاع $0.05\ pc$ بوجود آمده باشد، حداقل جرم مورد نیاز ابر برای رمبش چقدر است؟ چگالی ابر یکنواخت و میدان مغناطیسی در ابر تنها تابعی از زمان است. می‌توانید فرض کنید تکانه زاویه‌ای ابر در طول رمبش ثابت باقی می‌ماند. تمامی فرض‌های خود را به طور کامل ذکر کنید و از پخی ابر به خاطر چرخش صرف‌نظر کنید.

سوال دوم (40 نمره) :

آیا یک دایره صغیره داخل چهارضلعی که راس‌های آن چهار ستاره اصلی صورت فلکی فرس هستند، محاط می‌شود؟ اگر بله شعاع آن را بدست آورید و اگر نه استدلال کنید چرا؟

$$\text{Markab}: \quad \alpha = 23^h\ 6^{\mathrm{m}} \quad \delta = 15.3^\circ$$

$$\text{Scheat}: \quad \alpha = 23^{\mathrm{h}}\ 5^{\mathrm{m}} \quad \delta = 28.2^\circ$$

$$\text{Alpheratz}: \quad \alpha = 0^{\mathrm{h}}\ 9^{\mathrm{m}} \quad \delta = 29.1^\circ$$

$$\text{Algenib}: \quad \alpha = 0^{\mathrm{h}}\ 14^{\mathrm{m}} \quad \delta = 12.6^\circ$$

سوال سوم (30 نمره) :

یک کهکشان تخت و دایروی با چگالی جرم سطحی ثابت σ و شعاع محدود در نظر بگیرید. جالب است که در این کهکشان ذرات حرکت خاصی ندارند یا کم حرکت دارند! اگر فرض کنیم گرانش موج دارد و موج گرانشی با سرعت نور منتشر می‌شود، اندازه پتانسیل گرانشی را در فاصله z عمود بر صفحه کهکشان روی محور تقارن بر حسب زمان بیابید. مبدأ زمان را لحظه‌ای بگیرید که در نقطه مورد نظر حضور میدان گرانشی احساس شود.

سوال چهارم(50 نمره) :

فرض کنید که تابع IMF برای ستاره‌های کهکشان راه شیری به صورت زیر است :

$$\xi(M) = \xi_0 \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{-2.5}$$

به طوری که $\xi(M)dM$ جرم مجموع ستاره‌هایی از کهکشان است که هرکدام جرمی بین M و $M + dM$ دارند. فرض کنید که پس از ستاره‌زایی، بیشینه و کمینه جرم ستارگان تولید شده به ترتیب برابر 100 و 0.1 بر حسب جرم خورشید است.

فرض کنید آهنگ تولید ستاره در کهکشان به صورت زیر است :

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \exp\left(-\frac{t}{t_s}\right)$$

که در آن $t_s = 3\ Gyr$ است. رابطه بالا را برای همه‌ی ستاره‌ها صرف‌نظر از جرمشان، صادق تصور کنید. با فرض این که کهکشان از ستاره‌هایی با جرم $0.1\ M_{sun}$ تا $100\ M_{sun}$ تشکیل شده و عمر کهکشان $10\ Gyr$ است. چند درصد ستاره‌هایی که تا به حال تولید شده‌اند، هم اکنون زنده هستند؟

رابطه‌ی جرم-درخشندگی را برای همه ستاره‌ها $L \propto M^{3.5}$ فرض کنید.

سوال پنجم(40 نمره) :

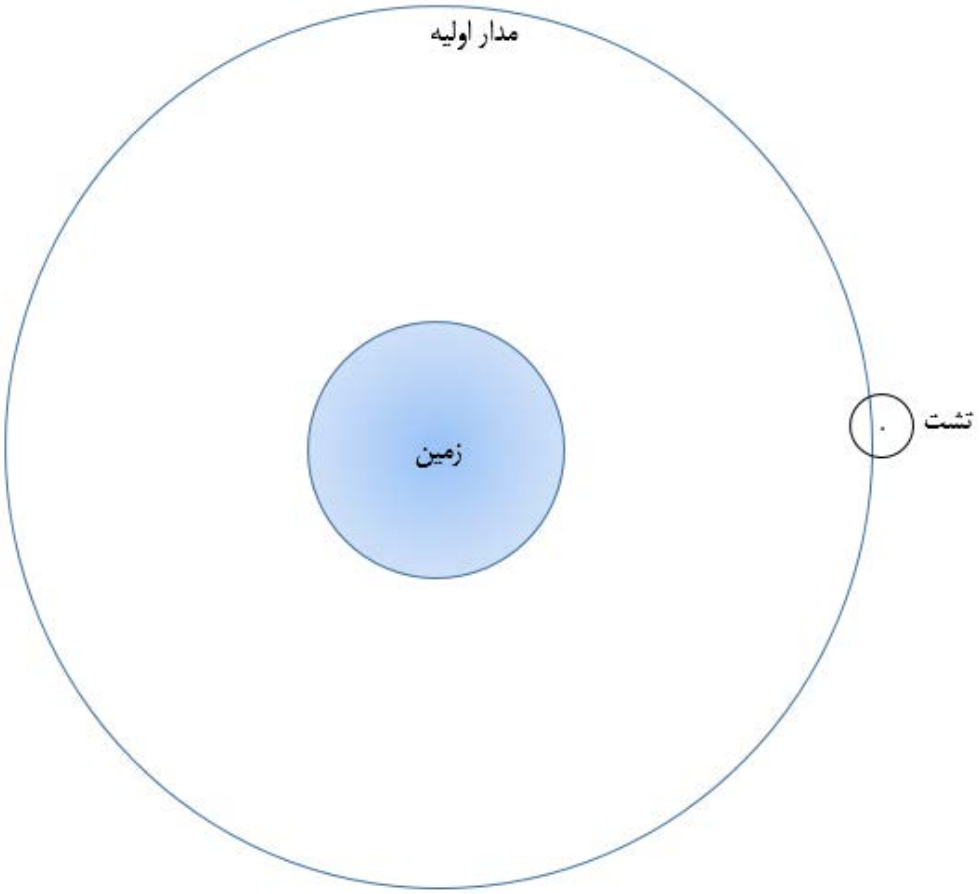
منجمی در شهر تهران با عرض جغرافیایی $\phi = 35.7°$، در حال رصد ستاره کاپلا (عیوق)، با مختصات $(\delta, \alpha) = (46°, 5^h 17^{min})$ می‌باشد. منجم برای این رصد از یک تلسکوپ نیوتونی با قدر حدی قابل تشخیص 13.81 و نسبت کانونی 10 به همراه چشمی $25\ mm$ با میدان دید $52°$ استفاده می‌کند. تاریخ رصد، 16 اسفند ماه و مدت زمان رصد، از زمانی است که خورشید به بیشترین زاویه اختلاف منظری خود می‌رسد تا 3 ساعت بعد از غروب خورشید. اگر تلکسوپ مجهز به موتور باشد، در طی رصد چند درصد از ستاره‌های آسمان که داخل چشمی دیده می‌شوند با ستاره کاپلا هم سمت می‌شوند؟ توزیع ستاره‌های آسمان را یکنواخت در نظر بگیرید. زاویه اختلاف منظر خورشید زاویه $\widehat{PSZ}$ است که در آن S به معنی خورشید است.

سوال ششم(40 نمره) :

یک پوسته کروی داغ و ملتهب به شعاع R داریم که با توان L در حال تابش کردن است. فرض کنید تابشش جسم سیاه است. یک نقطه در مرکز پوسته در نظر بگیرید. اسم این نقطه را A می‌گذاریم. نقطه B به فاصله خیلی کمی از A قرار دارد. این فاصله را δ می‌نامیم. سطح S سطحی مربعی شکل است که مرکز مربع نقطه B است و خط عمود بر مرکز مربع از A می‌گذرد. ضلع مربع هم برابر با 10δ است. مطلوب است میزان انرژی‌ای که در واحد زمان از مربع عبور می‌کند.

سوال هفتم(50 نمره) :

در سال 1400 شمسی ایرانیان به فناوری ساخت ماهواره‌های بدون اشتباه دست یافته‌اند!! حتی اشتباه این‌قدر کم است که این ماهواره‌ها گویا هیچ وقت سقوط نمی‌کنند و روال طبیعی را طی نمی‌کنند! ولی از جهتی که مأموریت این ماهواره به اتمام رسیده است و ایران هم نمی‌خواهد ماهواره را از بین ببرد و می‌خواهد ماهواره سالم به زمین برسد، نیاز دارد به هر نحوی شده ماهواره را از ادامه پرواز منصرف کند! یکی از منجمان انجمن نجوم ایران تصمیمی جالب می‌گیرد. طبق تصمیم او چون ماهواره با برخورد با ذرات غبار مالش داشته و باردار شده است می‌توانیم از نیروی مغناطیسی برای انحراف مدار استفاده کنیم. یک تشت دایره‌ای مغناطیسی داریم که در آن میدان مغناطیسی یکنواخت B عمود بر سطح تشت وجود دارد و شعاع تشت R است. مدار اولیه ماهواره دایره‌ای به شعاع r و بار و جرم ماهواره به ترتیب q و m است. چون می‌خواهیم ماهواره را سالم دریافت کنیم نیاز داریم هنگام برخورد ماهواره با زمین سرعت ماهواره مماس با سطح زمین باشد که ضربه‌ی کمتری به آن وارد شود. از R در مقابل r و از ابعاد ماهواره در مقابل R صرف‌نظر کنید. تشت طوری موازی صفحه مدار ماهواره قرار داده می‌شود که مرکز تشت در فاصله‌ی y (به طوری که $y < R$) از منحنی دایره مسیر اولیه و بیرون از دایره باشد و میدان مغناطیسی عمود بر صفحه مدار اولیه باشد. (شکل صفحه بعد) فرض کنید انحراف ماهواره به سمت زمین است، یعنی پس از این‌که ماهواره از بالای تشت عبور می‌کند جهت انحرافش به سمت زمین است. B را طوری تعیین کنید که شرط مماس شدن بر زمین ایجاب شود. دقت کنید که اگر بتوانید جواب را مستقیم و به صورت یک تک فرمول بنویسید حتماً باید این کار را بکنید.



التماس دعا

یا علی