«بسم الله الرحمن الرحیم»

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون آزمایشی

المپیاد نجوم مرحله دوم

نهمین تیم جمهوری اسلامی ایران

در المپیاد نجوم و اخترفیزیک

سال 1394

سوال اول:

شرط آستانه برای اینکه ابر برمبد این است که انرژی کل آن صفر باشد. (در واقع در مرز بین مقید و نامقید قرار داشته باشد.) انرژی کل ابر به صورت زیر است:

$$E_1 = -\frac{3}{5}\frac{GM_1^2}{R_1} + \frac{5}{2}NKT_1 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{4}{3}\pi R^3 u_B = 0$$

که در این عبارت جملات از سمت چپ به ترتیب ناشی از گرانش، انرژی جنبشی ذرات گاز، انرژی دورانی، انرژی مغناطیسی هستند. زیروند 1 برای تاکید بر اینکه کمیت‌های مرتبط با ابر پیش ستاره‌ای (و نه خود ستاره) منظور است، آورده شده است.

15 نمره

با فرض اینکه میدان مغناطیسی یکنواخت باشد، شار مغناطیسی اینگونه بدست می‌آید:

$$\phi = \int BdA = BA = B \times 4\pi R^2$$

اما با توجه به اینکه ذرات رسانا هستند (و اختلاف پتانسیل روی سطح رسانا صفر است. در نتیجه نیرو محرکه صفر است)، شار مغناطیسی ثابت می‌ماند. بنابراین:

$$B_1 = B_2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 5 \times 10^{-13}\ Tesla$$

5 نمره

از پایستگی تکانه زاویه‌ای برای بدست آوردن سرعت زاویه‌ای چرخش ابر استفاده می‌کنیم:

$$l = \frac{2}{5}MR^2\omega = cte.$$

3 نمره

$$\omega_1 = \omega_2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{2\pi}{T_2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 3 \times 10^{-19}\ \frac{rad}{s}$$

هم‌چنین تعداد ذرات گاز با توجه به اینکه جرم هر ذره $2m_H$ است، برابر می‌شود با:

$$N = \frac{M}{2m_H}$$

با جایگذاری این روابط و روابط مربوط به چگالی میدان مغناطیسی و گشتاور لختی که در جدول ثوابت آورده شده، معادله‌ی اولیه به این صورت در می‌آید:

$$\alpha M^2 + \beta M + \gamma = 0$$

که:

$$\alpha = -\frac{3}{5}\frac{G}{R_1} = -2.6 \times 10^{-26}$$

$$\beta = \frac{5KT_1}{4m_H} + \frac{1}{5} R_1^2\omega_1^2 = 1.0 \times 10^5$$

$$\gamma = \frac{2}{3}\frac{\pi R_1^3 B^2}{\mu_0} = 1.5 \times 10^{27}$$

12 نمره

با حل معادله درجه دو جرم بدست می‌آید:

$$M = 1.9\ M_{sun}$$

5 نمره

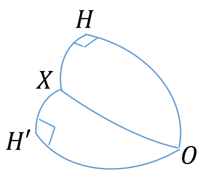
سؤال دوم:

روش اول:

در صورتی که بتوان یک دایره درون چهارضلعی محاط کرد، مرکز این دایره باید از چهار ضلع به یک فاصله باشد. طبق قضیه‌ای که در ادامه اثبات می‌کنیم، هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. بنابراین نقطه‌ای که روی تقاطع نیمسازهای دو زاویه‌ی چهارضلعی باشد، از سه تا از اضلاع آن به یک فاصله است. کافیست ثابت کنیم این نقطه از ضلع دیگر هم به یک فاصله است، یعنی روی نیمساز یکی دیگر از زوایا هم قرار دارد؛ در این صورت می‌شود یک دایره صغیره درون چهارضلعی محاط کرد.

10 نمره

اثبات قضیه: هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.



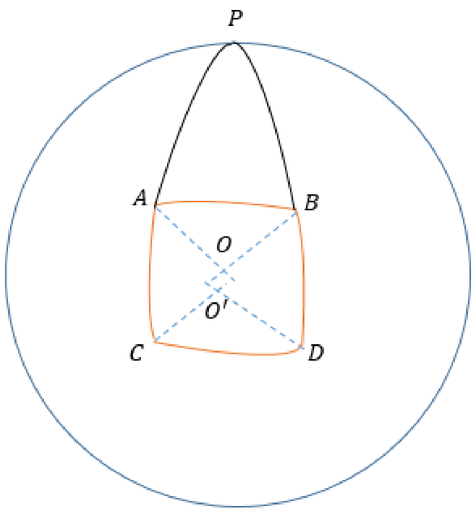
با توجه به شکل روبرو دو مثلث ΔOHX و $\Delta OH'X$ به حالت وتر و یک زاویه حاده متشابه‌اند. پس $XH = XH'$ و نقطه‌ی X از هر دو ضلع به یک فاصله است. با نوشتن رابطه سینوس‌ها هم می‌توان به راحتی به همین نتیجه رسید.

10 نمره

با توجه به شکل ابتدا برخی ضلع‌ها و زاویه‌های مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos AB = \sin\delta_A \sin\delta_B + \cos\delta_A \cos\delta_B \cos\Delta\alpha$$

$$AB = 14.06°$$



به همین ترتیب:

$$CD = 16.71°$$

و با نوشتن رابطه‌ی چهار جزئی در مثلث ΔPAB بدست می‌آوریم:

$$\tan \angle PAB = \frac{\sin \Delta\alpha}{\cos \delta_A \tan \delta_B - \sin \delta_A \cos \Delta\alpha}$$

$$\angle PAB = 82.50°$$

به طریق مشابه:

$$\angle PBA = 89.79°$$

$$\angle PDB = 3.84°$$

$$\angle PBD = 175.71°$$

$$\angle PCA = 0.99°$$

$$\angle PAC = 178.92°$$

$$\angle PDC = 78.71°$$

$$\angle PCD = 97.16°$$

بنابراین زوایای چهارضلعی بدست می‌آیند:

$$\angle A = \angle PAC - \angle PAB = 96.15°$$

$$\angle B = 85.92°$$

$$\angle C = 98.15°$$

$$\angle D = 82.55°$$

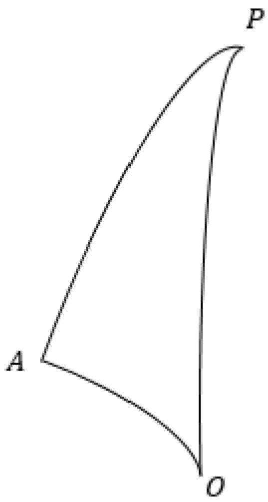
محل برخورد نیمسازهای $\angle A$ و $\angle B$ را O و محل برخورد نیمسازهای $\angle C$ و $\angle D$ را O' می‌نامیم. با نوشتن قانون چهارجزئی در مثلث ΔAOB بدست می‌آید:

$$\tan AO = \frac{\sin AB}{\cos AB \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2}}$$

$$AO = 9.53°$$

$$CO' = 10.94°$$

با توجه به مثلث روبرو:



$$\angle PAO = \angle PAC - \angle\frac{A}{2} = 130.85°$$

$$\angle PCO' = 40.09°$$

$$\sin\delta_O = \sin\delta_A \cos AO + \cos\delta_A \sin AO \cos\angle PAO$$

$$\tan\Delta\alpha = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\delta_A \cot AO - \sin\delta_A \cos\frac{A}{2}}$$

در نتیجه:

$$\delta_O = 21.75°$$

$$\Delta\alpha = 8.57°$$

$$\delta_{O'} = 23.52°$$

$$\Delta\alpha' = 8.91°$$

$$\alpha_O = \alpha_A + \Delta\alpha = 23^h 39^m$$

$$\alpha_{O'} = \alpha_C + \Delta\alpha' = 23^h 40^m$$

15 نمره

همان‌طور که می‌بینید، محل برخورد نیمسازهای $\angle A$ و $\angle B$ و محل برخورد نیمسازهای $\angle C$ و $\angle D$ حدود دو درجه با یکدیگر فاصله دارند. بنابراین نیمسازها همرس نیستند و دایره صغیره محاط نمی‌شود.

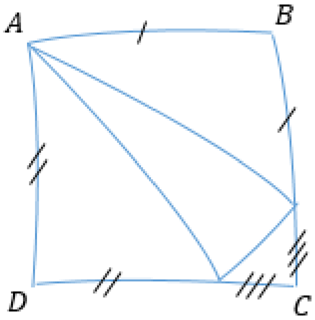
5 نمره

روش دوم:

قضیه‌ای در هندسه مسطحه وجود دارد که اگر مجموع دو ضلع روبروی یک چهارضلعی برابر با مجموع دو ضلع روبروی دیگر باشد، می‌توان یک دایره به آن چهارضلعی محاط کرد. ابتدا ثابت می‌کنیم این قضیه در هندسه کروی هم برقرار است.

10 نمره

اثبات قضیه:



یک چهارضلعی در نظر می‌گیریم که مجموع اضلاع روبروی آن با هم برابر باشد. روی یکی از ضلع‌ها به اندازه ضلع مجاور جدا می‌کنیم. این کار را برای یک ضلع دیگر هم انجام می‌دهیم. چون مجموع اضلاع روبرو با هم برابر است، پس مثلث ΔCMN متساوی‌الساقین است. چون مثلث‌های ΔABN و ΔADM هم متساوی‌الساقین هستند، نیمساز زوایای $\angle ABN$ و $\angle ADM$ و $\angle MCN$ عمود منصف‌های مثلث

ΔAMN هستند. اما از آنجایی که عمود منصف‌های هر مثلث همرس‌اند، پس سه نیمساز از چهارضلعی همرس هستند و بنابر قضیه‌ای که در روش اول گفته شد، یک دایره صغیره درون چهارضلعی محاط می‌شود.

15 نمره

حال با کمک قانون کسینوس‌ها اضلاع چهارضلعی را محاسبه می‌کنیم:

$$AB = 14.06°$$

$$CD = 16.71°$$

$$BD = 16.54°$$

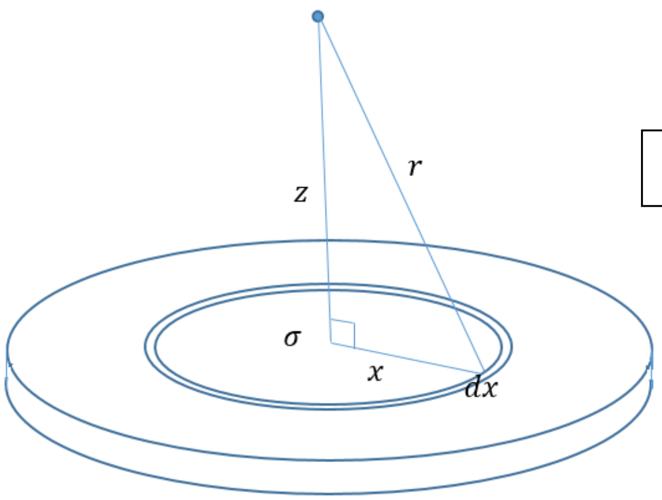
$$AC = 12.9°$$

$$AB + CD = 30.77° \neq BD + AB = 29.44°$$

10 نمره

در نتیجه نمی‌توان دایره صغیره درون این چهارضلعی محاط کرد.

5 نمره



سؤال سوم: به شکل مقابل توجه کنید. می‌دانیم پتانسیل هر جزء سطح در نقطه مورد نظر برابر است با:

$$d\phi = -\frac{Gdm}{r} = -\frac{G(2\pi x\sigma dx)}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

3 نمره

از طرفی انتگرال گیری را روی x انجام می‌دهیم و z ثابت است. پس:

$$\phi = -\pi G\sigma\int_0^R \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

که در آن R شعاع کهکشان است. با استفاده از قسمت راهنمایی داریم:

7 نمره

$$\phi = -\pi G\sigma\int_0^R \frac{d(x^2)}{\sqrt{x^2+z^2}} = -\pi G\sigma\int_0^R \frac{d(x^2+z^2)}{\sqrt{x^2+z^2}}$$
$$= -2\pi G\sigma\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right)$$

از طرفی لحظه‌ی صفر را موقعی تعریف کردیم که اولین موج گرانشی در نقطه موردنظر دریافت شود. بدیهی است که اولین موج گرانشی از نزدیک‌ترین نقطه به محل موردنظر یعنی دقیقاً مرکز دایره دریافت می‌شود. این زمان را زمان صفر می‌گیریم و زمان موج‌های بعدی را با آن می‌سنجیم. پس اگر دو پرتو گرانشی که دارند به سمت نقطه موردنظر حرکت می‌کنند که یکی از آن‌ها همان پرتوی ساطع شده از مرکز دایره است، با هم اختلاف مسیری داشته باشند و این اختلاف مسیر منجر به اختلاف زمان رسیدن دو پرتو شود زمان رسیدن پرتو اول را صفر و زمان رسیدن پرتو دوم را t می‌گیریم. پس:

10 نمره

$$ct = \text{اختلاف راه نوری} = \sqrt{x^2+z^2}-z$$

که رابطه بالا اختلاف راه نوری حلقه‌ای از دایره با پرتوی مرکزی بیان می‌کند. از طرفی پرتوها به ترتیب کمترین مسافت تا نقطه موردنظر به مقصد می‌رسند یعنی اول پرتوی کمترین فاصله می‌رسد سپس با گذشت زمان پرتوهای به مرور دورتری هم می‌رسند. لذا طبق رابطه بالا در زمان t، نقطه مورد نظر فقط با دیسکی به شعاع x ارتباط پیدا کرده است نه R (چون سرعت انتقال امواج بی‌نهایت نیست). پس کافیست در رابطه پتانسیل به جای R، x را قرار دهیم:

$$\phi = -2\pi G\sigma\left(\sqrt{x^2+z^2}-z\right)$$

جواب نهایی:

$$\phi(t) = -2\pi G\sigma ct$$

10 نمره

سؤال چهارم: ابتدا باید گفت که اگر عمر نوعی از ستاره‌ها بیش از عمر کهکشان (یعنی $10Gyr$) باشد تمام ستاره‌هایی که از این نوع در اول شکل‌گیری کهکشان به وجود آمده‌اند (که صفر فرض می‌کنیم) به زمان حال (یعنی $10Gyr$ بعد از شکل‌گیری ستاره) می‌رسند، علاوه بر تعدادی که در طی عمر کهکشان با نرخ داده شده تولید می‌شوند. ولی اگر عمر ستاره کمتر از عمر کهکشان باشد یک سری از ستاره‌ها تا به زمان حال برسند در عمر رشته اصلی خود می‌میرند و دیگر محاسبات به سادگی قبل نیست.

می‌دانیم عمر خورشید حدوداً $10Gyr$ است.

از رابطه جرم درخشندگی عمر ستاره را در رشته اصلی (قسمت اعظم عمر ستاره) با تقریبی که می‌زنیم می‌یابیم:

$$L=\frac{E}{T}=\frac{Mc^2}{T}\implies\frac{T}{T_{sun}}=\frac{\frac{M}{M_{sun}}}{\frac{L}{L_{sun}}}\implies T(Gyr)=10\,\frac{\frac{M}{M_{sun}}}{\left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{3.5}}$$
$$=10\left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{-2.5}$$

3 نمره

حال می‌بینیم که اگر جرم ستاره‌ای بیش از جرم خورشید باشد عمر آن کمتر از $10Gyr$ است و جزو ستاره‌هایی قرار می‌گیرد که قبل از زمان حال مرگ و میر داشته‌اند. فعلاً سهم آن ستاره‌های بدون مرگ و میر یعنی کم‌جرم‌تر از خورشید را حساب می‌کنیم. تعداد کل ستاره‌ها در اول عمر کهکشان را صفر در نظر می‌گیریم و به مرور زمان ستاره تولید می‌شود. بعد از گذشت زمان dt تعدادِ dN ستاره از تمام جرم‌ها شکل می‌گیرد. از طرفی ما فقط قسمتِ M_{min} تا جرم خورشید را می‌خواهیم. با تقسیم تابع IMF بر جرم، آن را به تعداد تبدیل می‌کنیم. اگر N ستاره تولید شود داریم:

$$N=\int_{M_{min}}^{M_{max}}\frac{\xi(M)dM}{M}=\frac{\xi_0}{2.5}\left(\left(\frac{M_{min}}{M_{sun}}\right)^{-2.5}-\left(\frac{M_{max}}{M_{sun}}\right)^{-2.5}\right)\approx 126.49\,\xi_0$$

4 نمره

می‌دانیم بعد از گذشت زمانی، تعدادی ستاره تولید می‌شود که همان‌طور که در بالا دیدیم به ξ_0 ربط دارد. از طرفی با گذشت زمان تعداد ستاره‌های تولیدی متغیر است لذا نتیجه می‌گیریم ξ_0 تابع زمان است. به هر صورت، می‌خواهیم ببینیم اگر dN ستاره تولید شد، چه تعدادی از آن در بازه‌ی M_{min} تا جرم خورشید است. تعداد ستاره‌های تولیدی بین M و $M+dM$ می‌دانیم $\frac{\xi(M)dM}{M}$ هست. پس از بعد از تولید dN ستاره تعدادِ

$$dN\times\frac{\frac{\xi(M)dM}{M}}{126.49\xi_0}=\frac{dN}{126.49}\times\frac{M^{-3.5}}{M_{sun}^{-2.5}}\,dM$$

8 نمره

از آن بین M و $M+dM$ هستند. در واقع بالا یک تناسب بستیم. برای ستاره‌های کم‌جرم‌تر از خورشید که همه‌شان باقی می‌مانند می‌توانیم دو انتگرال را جداگانه بگیریم. یعنی اول ببینیم در طول عمر کهکشان کلاً چه تعداد ستاره تولید می‌شود سپس آن را ضربدر احتمال تولید ستاره بین M_{min} تا جرم خورشید بکنیم. یعنی:

$$N_{M_{min}-M_{sun}} = \int dN \int_{M_{min}}^{M_{sun}} \frac{M^{-3.5}dM}{126.49\ M_{sun}^{-2.5}}$$
$$= -\alpha t_s \int_0^{10Gyr} e^{-\frac{t}{t_s}}\ d\left(-\frac{t}{t_s}\right) \int_{M_{min}}^{M_{sun}} \frac{M^{-3.5}dM}{126.49\ M_{sun}^{-2.5}}$$
$$= \alpha t_s \left(1 - e^{-\frac{10}{3}}\right) \frac{\left(\left(\frac{M_{min}}{M_{sun}}\right)^{-2.5} - 1\right)}{126.49 \times 2.5}$$

5 نمره

رابطه بالا تعداد ستاره‌های کم‌جرم‌تر از خورشید را می‌رساند که به زمان حال رسیده‌اند. و اما برای ستاره‌های پرجرم‌تر از خورشید قضیه کمی پیچیده‌تر است. اگر عمر ستاره‌ای با جرم M برابر با T_M باشد منطقیست که هر ستاره‌ای که در بازه زمانیِ $10Gyr - T_M$ تولید می‌شود به ما (زمان $10Gyr$) می‌رسد و هر ستاره‌ای قبل از آن تولید شده باشد قبل از رسیدن به زمان حال عمر رشته اصلی خود را تمام می‌کند. پس باید ببینیم در کل چه تعداد ستاره از بازه‌ی $10Gyr - T_M$ تا $10Gyr$ تولید می‌شود سپس ستاره‌های درون بازه جرمی مورد نظرمان را بیابیم. ابتدا حساب می‌کنیم اگر زمان عقب رانده شده از $10Gyr$ را عمر ستاره‌های با جرمِ M را در نظر بگیریم، چه تعداد ستاره از کل اجرام به ما می‌رسد. منطیقست که:

$$\int_{10-T_M}^{10} dN = -\alpha t_s \int_{10-T_M}^{10} e^{-\frac{t}{t_s}}\ d\left(-\frac{t}{t_s}\right) = \alpha t_s \left(e^{-\frac{(10-T_M)}{3}} - e^{-\frac{10}{3}}\right)$$

5 نمره

پس با جایگذاری T_M برحسب جرم داریم:

$$\alpha t_s \left(e^{-\frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{-2.5}\right)} - e^{-\frac{10}{3}}\right)$$

1 نمره

از طرفی قبلاً گفتیم که اگر dN ستاره تولید شود تعدادِ

$$\frac{dN}{126.49} \times \frac{M^{-3.5}}{M_{sun}^{-2.5}}\ dM$$

از آن‌ها مربوط به بازه جرمی بین M و $M + dM$ است. پس باید مقداری را که برای تعداد کل در بالا به دست آوردیم ضرب‌در $\frac{M^{-3.5}}{126.49 M_{sun}^{-2.5}}\ dM$ کنیم و انتگرال بگیریم:

$$\alpha t_s \int_{M_{sun}}^{M_{max}} \frac{M^{-3.5}}{126.49 M_{sun}^{-2.5}} \left(e^{-\frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{-2.5}\right)} - e^{-\frac{10}{3}}\right) dM$$

6 نمره

$$= \frac{\alpha t_s}{126.49} e^{-\frac{10}{3}} \left[\int_{M_{sun}}^{M_{max}} \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{-3.5} e^{\frac{10}{3}\left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{-2.5}} d\left(\frac{M}{M_{sun}}\right) - \int_{M_{sun}}^{M_{max}} \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^{-3.5} d\left(\frac{M}{M_{sun}}\right) \right]$$

باید انتگرال زیر را حل کنیم

$$\int x^{-3.5} e^{\frac{10}{3}x^{-2.5}} dx = \frac{1}{-2.5} \times \frac{3}{10} \int e^{\frac{10}{3}x^{-2.5}} d\left(\frac{10}{3}x^{-2.5}\right) = -\frac{3}{25} e^{\frac{10}{3}x^{-2.5}}$$

پس با جایگذاری کران‌ها:

$$N_{M_{sun}-M_{max}} = \frac{\alpha t_s}{126.49} e^{-\frac{10}{3}} \times \frac{1}{2.5} \left[\frac{3}{10}\left(e^{\frac{10}{3}} - e^{\frac{10}{3}\left(\frac{M_{max}}{M_{sun}}\right)^{-2.5}} \right) - \left(1 - \left(\frac{M_{max}}{M_{sun}}\right)^{-2.5} \right) \right]$$

6 نمره

حال تعداد کل تولیدی‌ها را می‌یابیم:

$$N_{tot} = \int_0^{10Gyr} dN = \alpha t_s \left(1 - e^{-\frac{10}{3}}\right)$$

2 نمره

و کسر موردنظر برابر است با:

$$\frac{N_{M_{min}-M_{sun}} + N_{M_{sun}-M_{max}}}{N_{tot}} = \frac{\frac{3}{10}\left(1 - e^{-\frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{M_{max}}{M_{sun}}\right)^{-2.5}\right)}\right) - e^{-\frac{10}{3}}\left(1 - \left(\frac{M_{max}}{M_{sun}}\right)^{-2.5}\right) + \left(1 - e^{-\frac{10}{3}}\right)\left(\left(\frac{M_{min}}{M_{sun}}\right)^{-2.5} - 1\right)}{126.49 \times 2.5 \left(1 - e^{-\frac{10}{3}}\right)}$$

با جایگذاری اعداد مقدار کسر بالا را حدود 99.77% در می‌آوریم.

10 نمره

سؤال پنجم: ابتدا به نظر می‌رسد لازم است که میدان دید واقعی تلسکوپ را بیابیم. (در حالی که بعداً می‌بینیم لازم نبوده! ولی به هر حال به عنوان تمرین می‌نویسیم ولی بارم تعلق نمی‌گیرد) برای این‌کار نیاز به مساحت دهانه تلسکوپ داریم. از قدر حدی پشت تلسکوپ استفاده می‌کنیم و قدر حدی چشم را همان طور که در ثوابت داده شده است، 6.5 می‌گیریم. هم چنین قطر مردمک چشم را 6mm می‌گیریم. پس:

$$13.81 - 6.5 = -2.5 \log\left(\frac{\frac{1}{D^2}}{\frac{1}{(6mm)^2}}\right) = 5 \log\left(\frac{D}{6mm}\right) \Longrightarrow D \approx 0.174\, m$$

از روی این و نسبت کانونی، فاصله کانونی چشمی را می‌یابیم:

$$f_o = D \times \left(\frac{f_o}{D}\right) = 0.174\, m \times 10 = 1.74\, m$$

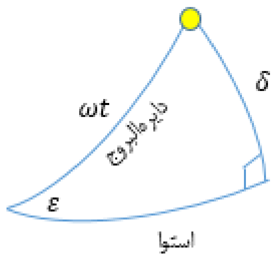
حال قادریم که بزرگ‌نمایی را حساب کنیم:

$$m = \frac{f_o}{f_e} = \frac{1.74}{0.025} \approx 69.54$$

سپس میدان دید واقعی را حساب می‌کنیم:

$$\text{میدان دید واقعی} = \frac{\text{میدان دید ظاهری}}{m} = \frac{52°}{69.54} \approx 0.748°$$

میدان دید بالا میدان دیدیست که پشت تلسکوپ داریم. اما حالا باید مدت زمان رصد را بیابیم. ابتدا باید میل و بعد خورشید را بیابیم:



از سینوس‌ها داریم:

$$\sin\delta = \sin\omega t \sin\varepsilon \implies \delta = -5.07°$$

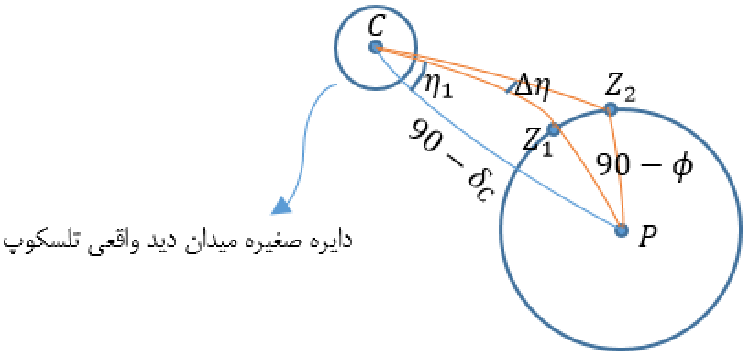
4 نمره

هم چنین با چهارجزئی

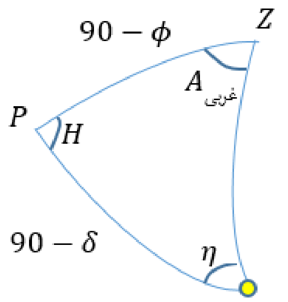
$$0 = \frac{\sin\alpha}{\tan\delta} - \frac{1}{\tan\varepsilon} \implies \alpha \approx -11.78°$$

4 نمره

برای چیزی که در نهایت می‌خواهیم یک دستگاه Z چرخان می‌کشیم به طوری که ستاره قطبی و همه ستاره‌ها در آسمان از جمله عیوق ثابت باشند و زمین و Z ناظر حول P بچرخد. چون عیوق ثابت است و تلسکوپ موتور دارد و همیشه عیوق در مرکز آن است میدان دید تلسکوپ هم دایره‌ای ثابت است. دقت کنید شکل زیر در حالت کلی است ولی در این مسئله به خاطر اعداد عرض جغرافیایی و میل عیوق دایره کوچک‌تر داخل دایره بزرگ‌تر می‌افتد. (چرا؟)



η در بالا زاویه اختلاف منظر است. ستاره‌هایی با عیوق هم سمت می‌شوند که روی خط واصل بین Z و C که مرکز چشمی است قرار گیرند در مدت زمان رصد به اندازه قطاع $2\Delta\eta$ از کل دایره میدان دید جاروب می‌شوند و ستاره‌های در آن ناحیه هم سمت می‌شوند. پس باید نسبتِ $\frac{2\Delta\eta}{360}$ را حساب کنیم. همان طور که می‌بینید اصلاً برای حل نیاز به مشخصات تلسکوپ و اندازه میدان دید واقعی نبود. شکل زیر روش به دست آوردن زاویه اختلاف منظر را نشان می‌دهد. ابتدا اختلاف منظر بیشینه برای خورشید را باید در نظر بگیریم.



$A_{\text{غربی}}$ سمتیست که از غرب اندازه گرفته می‌شود. از سینوس‌ها:

$$\sin\eta = \frac{\sin A_{\text{غربی}} \cos\phi}{\cos\delta}$$

5 نمره

چون که ϕ و δ ثابتند، بیشینه مقدار η وقتیست که $A_{\text{غربی}}$ نود درجه باشد یعنی خورشید دقیقاً در غرب باشد. حال برای H یک چهارجزئی می‌نویسیم:

$$\cos H \sin\phi = \cos\phi \tan\delta - \sin H \cot 90 = \cos\phi \tan\delta$$
$$\Longrightarrow H_{sun1} \approx 97.097°$$

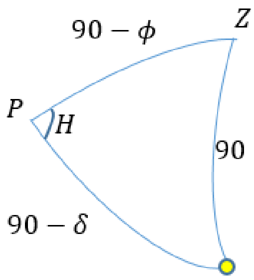
4 نمره

با توجه به منفی بودن میل خورشید زاویه ساعتی بالا مربوط به زمان پس از غروب خورشید است. حال باید زاویه ساعتی ستاره عیوق را در همین لحظه بیابیم که از اختلاف بعدشان داریم:

$$H_{Capella1} = 97.097° - \left(5h\ 17min - (-11.78°)\right) \approx 6.07°$$

3 نمره

در اینجا زاویه ساعتی خورشید سه ساعت پس از غروب را می‌یابیم. برای زاویه ساعتی غروب باید ارتفاع صفر باشد:



با کسینوس‌ها:

$$0 = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos H$$

با جایگذاری مقدار میل خورشید:

$$H_{\text{غروب}} \approx 86.34°$$

و با تأثیر سه ساعت:

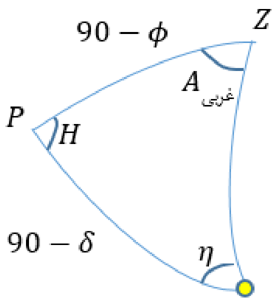
$$H_{sun2} \approx 86.34° + 3 \times 15° = 131.34°$$

4 نمره

باز با اختلاف بعد زاویه ساعتی عیوق را در لحظه دوم می‌یابیم.

$$H_{Capella2} = 131.34° - \left(5h\ 17min - (-11.78°)\right) \approx 40.31°$$

3 نمره



قطعاً در این زاویه ساعتی عیوق غروب نکرده است چرا که برای میل منفیِ خورشید زاویه ساعتی غروب را حدود $86°$ به دست آوردیم در حالی که میل عیوق مثبت است و زاویه ساعتی غروبش از این مقدار هم بیشتر می‌شود. حال باید زاویه اختلاف منظر عیوق دو زمان را به دست آوریم. مثلث قبلی را یادآوری می‌کنیم. یک چهارجزئی می‌نویسیم:

$$\sin\delta \cos H = \cos\delta \tan\phi - \frac{\sin H}{\tan\eta} \Longrightarrow$$

$$\tan\eta = \frac{\sin H}{\cos\delta \tan\phi - \sin\delta \cos H}$$

4 نمره

با گذاشتن مقادیر متناظر برای عیوق در لحظه اولیه و ثانویه داریم:

$$\eta_{Capella1} \approx 94.36°$$

1 نمره

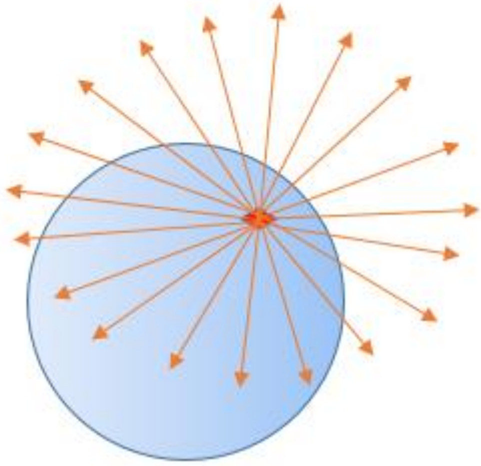
$$\eta_{Capella2} \approx 153.95°$$

1 نمره

$$\text{کسر مورد نظر} \approx \frac{153.95 - 94.36}{180} \approx 33.1\%$$

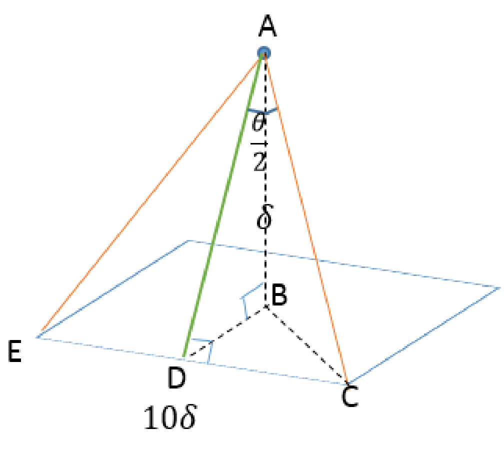
7 نمره

سؤال ششم: ابتدا باید دید تقارن تابشی کره به چه صورت است؟ واضح است که چون شکل پوسته کروی است و تابش جسم سیاه در همه جهات یکنواخت است، تقارن دور شدن انرژی از پوسته باید کروی باشد. دقت کنید که خود نورها را نمی‌گوییم چرا که از هر المان به صورت زیر در همه جهات تابش می‌شود:



استدلال‌ها 15 نمره

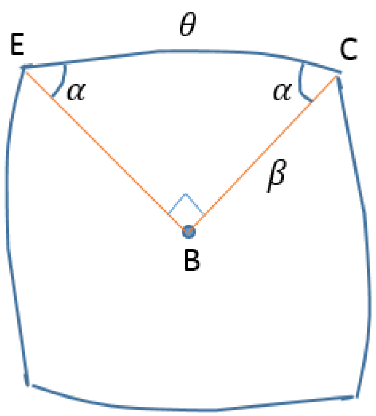
لیکن اگر همه المان‌ها را در نظر بگیریم جمع انرژی‌ای که دارد از کره خارج می‌شود (چه به سمت بیرون چه به سمت درون پوسته) در تقارن کروی خارج می‌شود؛ کره‌ای که مرکز آن مرکز پوسته باشد. پس اگر با انرژی‌هایی که داخل پوسته می‌آید کار داشته باشیم باید بگوییم در ابتدا هر ذره از پوسته در تمام فضا تابش می‌کند که منطقاً نصف آن به سمت درون کره است پس در مجموع در ابتدا توان $\frac{L}{2}$ به صورت کروی وارد پوسته می‌شود و مدام شعاع کره کم می‌شود تا به صفر برسد، یعنی یک نقطه. چون انرژی در مرکز از بین نمی‌رود انرژی‌ها به مسیر قبلی خودشان ادامه می‌دهند و انگار از این لحظه به بعد یک منبع نقطه‌ای جدید در مرکز شکل گرفته است که توان آن همان $\frac{L}{2}$ است، منتها این دفعه از مرکز به سمت بیرون. پس در واقع یک کره‌ی تابشی کوچک‌شونده با توان $\frac{L}{2}$ و یک کره تابشی بزرگ‌شونده با همان توان داریم. اگر یک عنصر سطح در جایی از کره بگیریم از بالا به سمت پایین و از پایین به سمت بالای آن عنصر یک میزان انرژی عبور می‌کند. دقت کنید که این لزوماً به معنی صفر بودن انرژی عبوری نیست. در هر حال یک انرژی‌ای عبور می‌کند و سؤال انرژی عبوری را خواسته است و شار خالص که صفر است را نخواسته است. پس کار ما این است که انرژی عبوری از مرکز به سمت بیرون را برای مربع مورد نظر حساب کنیم بعد ضرب‌در دو کنیم که سهم هر دو انرژی عبوری از دو طرف حساب شود. باید ابتدا دید مربعمان از دید مرکز کره چه زاویه فضایی را اشغال می‌کند. باید بیابیم مرکز کره هر ضلع مربع را در چه زاویه‌ای (θ) می‌بینند.



$$AC = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 + 1}\,\delta = \sqrt{51}\,\delta$$

$$AD = \sqrt{5^2 + 1}\,\delta = \sqrt{26}\,\delta \implies \theta = 2\cos^{-1}\left(\frac{AD}{AC}\right) = 2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{26}{51}}\right) \approx 88.88°$$

4 نمره



حال طبق تقارن برای هرچهار ضلع، یک مربع کروی داریم که هم چهار ضلعش هم چهار زاویه‌اش با هم برابرند

طبق تقارن برای هر چهار ضلع زاویه $E\hat{B}C$ باید نود درجه باشد. هم چنین β برابر است با $B\hat{A}C$. پس:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{1}\right) \approx 81.95°$$

6 نمره

با نوشتن سینوس‌ها زاویه α را می‌یابیم:

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 90}{\sin\theta}\sin\beta\right) \approx 82.03°$$

9 نمره

حال از رابطه مساحت مثلث کروی و زاویه فضایی بهره می‌بریم:

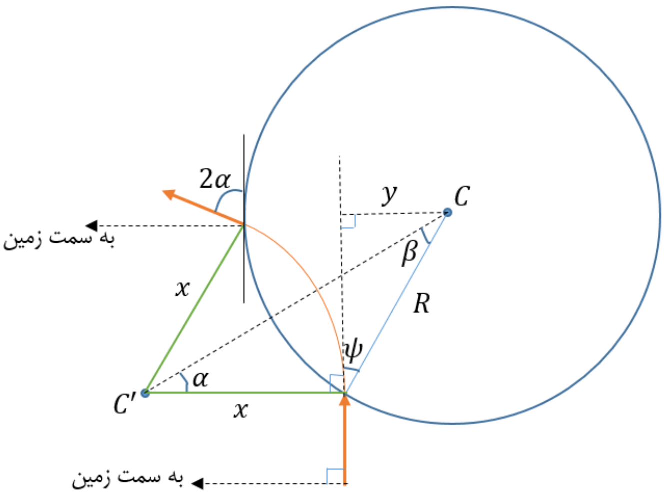
$$\Omega_{\text{مربع}} = \frac{S_{\text{مربع}}}{R^2} = 4 \times \left(2\alpha(rad) + \frac{\pi}{2} - \pi\right) \approx 5.17\ sr$$

6 نمره

چون تقارن کروی است می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\text{توان مورد انتظار}}{\frac{L}{2}} = \frac{\Omega_{\text{مربع}}}{4\pi}$$

$$\text{توان عبوری از مربع از طرفین} = 2 \times \left(\frac{L}{2} \times \frac{\Omega_{\text{مربع}}}{4\pi}\right) \approx 0.41\ L$$



سؤال هفتم: به خاطر این که ابعاد تشت نسبت به ابعاد دایره‌ی مدار قابل اغماض است یعنی عملاً ماهواره با یک مسیر به شکل خط از بالای تشت رد می‌شود. هم-چنین چون که ابعاد تشت قابل اغماض است و توانستیم خط بگیریم یعنی عملاً مرکز دایره مدار را نسبت به تشت در بی‌نهایت گرفتیم لذا می‌توان در طی حرکت ماهواره از بالای تشت از نیروی گرانش زمین صرف‌نظر کرد.

2 نمره

نیروی مغناطیسی وارد بر ماهواره برابر است با: (بردار سرعت و میدان بر هم عمودند و جهت نیرو عمود بر آن دو است)

2 نمره

$$F_B = qvB$$

مادامی که ماهواره بالای تشت است این نیرو به آن وارد می‌شود و چون نیرو به سرعت عمود است لذا کاری انجام نمی‌دهد.

از طرفی چون نیرو کاری انجام نمی‌دهد یعنی انرژی را عوض نمی‌کند و چون ابعاد تشت در مقایسه با شعاع مدار قابل اغماض است یعنی قبل از تحول و بعد از تحول ماهواره عملاً در یک فاصله از زمین قرار دارد و انرژی پتانسیلش تغییری نکرده است پس چون انرژی کل هم تغییری نکرده است لذا انرژی جنبشی و یعنی اندازه سرعت ماهواره در طول حرکت ثابت است. ثابت بودن اندازه سرعت و اندازه میدان مغناطیسی به ما ثابت بودن اندازه نیروی مغناطیسی را نتیجه می‌دهد و این را می‌توان خاصیتی از نیروی جانب مرکز یک دایره دانست. لذا مسیر حرکت ماهواره بالای تشت یک قطاعی از دایره خواهد بود. شعاع دایره مسیر جدیدش را x می‌نامیم.

استدلال 5 نمره

1 نمره

$$qvB = \frac{mv^2}{x} \Longrightarrow x = \frac{mv}{qB}$$

$$\psi = \sin^{-1}\left(\frac{y}{R}\right)$$

$$x \sin\alpha = R\sin\beta = R\sin(360 - 90 - \psi - \alpha) = -R\cos(\psi + \alpha)$$
$$= R\sin\psi\sin\alpha - R\cos\psi\cos\alpha \Longrightarrow$$

4 نمره

$$\tan\alpha = \frac{R\cos\psi}{R\sin\psi - x}$$

از طرفی میزان انحراف بردار سرعت به اندازه 2α به سمت زمین است. حال باید بردار تکانه زاویه‌ای واحد جرمِ جدید (h') را بیابیم. قبلاً بردار مکان و سرعت بر هم عمود بودند و بعد از عبور از بالای تشت اندازه آن دو بردار عملاً تغییر نمی‌کند و فقط زاویه بینشان به اندازه 2α بیشتر می‌شود. پس:

3 نمره

$$h' = rv\sin(90 + 2\alpha) = rv\cos 2\alpha$$

حال باید سرعت مداری ماهواره قبل از تحول را بیابیم:

3 نمره

$$\frac{GM_E}{r^2} = \frac{v^2}{r} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}}$$

پس

$$h' = \sqrt{GM_E r}\cos 2\alpha$$

اما می‌دانیم انرژی واحدجرم مدار در قبل از تحول برابر است با

$$-\frac{GM_E}{2r}$$

و بعد از تحول که مدارش یک بیضی با نیم‌قطر بزرگ a می‌شود برابر است با:

$$-\frac{GM_E}{2a}$$

به خاطر استدلال گفته شده مبنی بر پایسته ماندن انرژی داریم:

3 نمره

$$a = r$$

از طرفی می‌دانیم تکانه زاویه‌ای واحد جرم بیضیمان که خروج از مرکز e هم دارد برابر است با:

$$h' = \sqrt{GM_E r(1-e^2)}$$

که با برابر قرار دادن با چیزی که قبلاً به دست آوردیم داریم:

5 نمره

$$e = \sin 2\alpha$$

حال می‌دانیم کمترین فاصله ماهواره با زمین در نقطه حضیض است و در شرایطی که مدار ماهواره تماماً بیرون زمین باشد نقطه حضیض نقطه برخوردی است چرا که تا به کمترین فاصله نرسد نمی‌تواند برخورد کند. می‌ماند این قسمت قضیه که اگر تمام مدار بیرون زمین نباشد چه کنیم؟ در آن حالت ممکن است در نقطه حضیض برخورد نباشد ولی دیگر شرط مماس شدن بر زمین را نداریم. لذا تنها حضیض است که می‌تواند این خصوصیت را داشته باشد.

استدلال 5 نمره

پس:

$$R_E = a(1-e) = r(1-\sin 2\alpha)$$

حال عملیات معکوس را انجام می‌دهیم.

2 نمره

$$\sin 2\alpha = 1 - \frac{R_E}{r} \Longrightarrow \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = 1 - \frac{R_E}{r}$$

$$\tan^2\alpha\left(1-\frac{R_E}{r}\right)-2\tan\alpha+\left(1-\frac{R_E}{r}\right)=0$$

3 نمره

$$\tan\alpha=\frac{1\pm\sqrt{1-\left(1-\frac{R_E}{r}\right)^2}}{\left(1-\frac{R_E}{r}\right)}=\frac{R\cos\psi}{R\sin\psi-x}$$

$$x=\frac{mv}{qB}=R\,\frac{\sin\psi\left(1\pm\sqrt{1-\left(1-\frac{R_E}{r}\right)^2}\right)-\cos\psi\left(1-\frac{R_E}{r}\right)}{1\pm\sqrt{1-\left(1-\frac{R_E}{r}\right)^2}}$$

5 نمره

$$B=\frac{m\sqrt{\frac{GM_E}{r}}\left(1\pm\sqrt{1-\left(1-\frac{R_E}{r}\right)^2}\right)}{q\left(y\left(1\pm\sqrt{1-\left(1-\frac{R_E}{r}\right)^2}\right)-\sqrt{R^2-y^2}\left(1-\frac{R_E}{r}\right)\right)}$$

حال باید ببینیم چرا دو تا جواب برای میدان به دست آمد. خواهیم دید که فقط یک جواب درست است. اگر به منشأ ظهور این مثبت و منفی دوباره توجه کنیم:

$$\tan\alpha=\frac{1\pm\sqrt{1-\left(1-\frac{R_E}{r}\right)^2}}{\left(1-\frac{R_E}{r}\right)}$$

حال به اصل موضوع برمی‌گردیم:

$$\sin 2\alpha=1-\frac{R_E}{r}\Longrightarrow\alpha=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(1-\frac{R_E}{r}\right)\quad \text{و}\quad 90-\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(1-\frac{R_E}{r}\right)$$

یعنی دو تا α ی مثبت داریم که برای هرکدام رابطه

$$\sin 2\alpha=1-\frac{R_E}{r}$$

برقرار است لذا دو تا آلفا داریم که هر دو یک خروج از مرکز را نتیجه می‌دهند. ولی باید دقت کنیم یک شرط دیگر هم داریم. قبلاً داشتیم:

$$\sqrt{GM_E r}\cos 2\alpha=\sqrt{GM_E r(1-e^2)}$$

از رابطه بالا نتیجه می‌گیریم که $\cos 2\alpha$ باید مثبت باشد. این مثبت بودن موقعی اتفاق می‌افتد که ما جوابِ

$$\alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(1 - \frac{R_E}{r}\right)$$

را اختیار کنیم. حال که فهمیدیم جواب یکیست باید تعیین علامت بکنیم در فرمول تانژانت. روشی که می‌گوییم یک روش است ممکن است روش‌های ساده دیگر به ذهن شما برسد که اگر قانع کننده باشد اشکال ندارد. داریم:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(1 - \frac{R_E}{r}\right)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(1 - \frac{R_E}{r}\right)\right)} = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\sin^{-1}\left(1 - \frac{R_E}{r}\right)\right)}{1 + \cos\left(\sin^{-1}\left(1 - \frac{R_E}{r}\right)\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_E}{r}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_E}{r}\right)^2}}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_E}{r}\right)^2}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_E}{r}\right)^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{R_E}{r}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_E}{r}\right)^2}} = \frac{1 - \frac{R_E}{r}}{1 + \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_E}{r}\right)^2}}$$

حال که به رابطه بالا رسیدیم می‌بینیم شکلی شبیه به معکوس آن تانژانتی که داشتیم دارد. علامت تانژانت را اگر منفی اختیار کنیم به نظر می‌رسد با مخرج رابطه بالا مزدوج می‌شود. امتحان می‌کنیم! اگر نتیجه داد همان علامت منفی را اختیار می‌کنیم.

$$\left(1 + \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_E}{r}\right)^2}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_E}{r}\right)^2}\right) = \left(1 - \frac{R_E}{r}\right)\left(1 - \frac{R_E}{r}\right)$$

از طرفی اگر طرف چپ بالا را حل کنیم واقعاً با طرف راست برابر است پس جواب منفی جواب درست است و جواب مثبت مربوط به حالتیست که کسینوس منفی می‌شود و ما نمی‌خواهیم. جواب نهایی:

$$B = \frac{m\sqrt{\frac{GM_E}{r}}\left(1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_E}{r}\right)^2}\right)}{q\left(y\left(1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_E}{r}\right)^2}\right) - \sqrt{R^2 - y^2}\left(1 - \frac{R_E}{r}\right)\right)}$$

7 نمره با استدلال منطقی