«بسم الله الرّحمن الرّحیم»

پاسخ‌نامه تشریحی
مرحله دوم آزمایشی
المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بارم تمام سؤالات بیست نمره می‌باشد.

نهمین تیم جمهوری اسلامی ایران در

المپیاد جهانی نجوم و اخترفیزیک

سال 1394

1- اثر زاویه داشتن جهت دید را در نظر نمی‌گیریم. عنصری دایروی به جرم dM در نظر می‌گیریم که در فاصله r تحت مدار دایروی در حال سقوط روی خورشید است. انرژی این عنصر برابر است با:

$$dE = -\frac{GM_{sun}dM}{2r}$$

میزان تغییر انرژی بر حسب زمان به صورت زیر است:

$$\dot{E} = -\frac{GM_{sun}}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dM}{r}\right)$$

می‌دانیم جرم dM در طول زمان تغییر نمی‌کند و همان تکه جرم در همه زمان‌ها تماماً روی خورشید سقوط می‌کند لذا از مشتق بیرون کشیده می‌شود.

5 نمره

$$\dot{E} = \frac{GM_{sun}(dM)}{2r^2}\dot{r} = \frac{GM_{sun}\dot{M}}{2r^2}dr$$

1 نمره

حال اگر تعادل گرمایی داشته باشیم میزان انرژی از دست رفته باید برابر با میزان انرژی تابش شده باشد.

$$\dot{E} = \delta L = 2dA\,\sigma T^4$$

تابش از تمام سطح انجام می‌شود یک سطح رویی و یک سطح زیر که مساحت هر کدام dA است لذا در دو ضرب می‌شود.

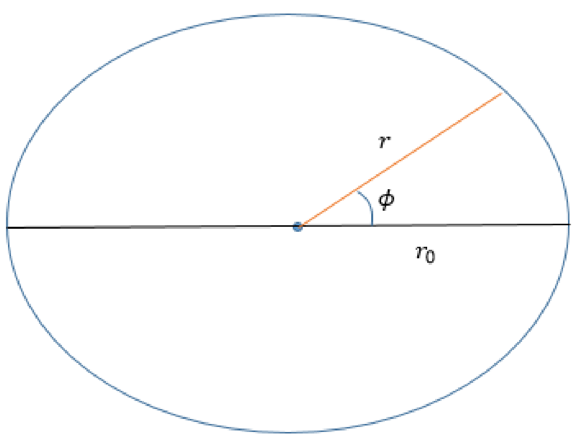
$$\dot{E} = 2(2\pi r\,dr)\sigma T^4 = 4\pi r\sigma T^4\,dr = \frac{GM_{sun}\dot{M}}{2r^2}dr$$

پس

4 نمره

$$T = \left(\frac{GM_{sun}\dot{M}}{8\pi\sigma r^3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

یک مدار دایره‌ای به شعاع r_0 در نظر می‌گیریم. اگر همان‌طور که مسأله گفته با زاویه $90 - \beta$ نسبت به خط عمود بر دایره به آن نگاه کنیم آن را یک بیضی خواهیم دید که نیم قطر بزرگش همان r_0 است و نیم‌قطر کوچکش $r_0 \sin\beta$ است. اگر راستای زاویه سمت را طوری تعریف کنیم که $\phi = 0$ همان راستای نیم‌قطر بزرگ باشد باید بتوانیم فاصله مرکز بیضی تا نقطه‌ای در محیط بیضی را بر حسب ϕ پیدا کنیم.



5 نمره

$$\frac{r^2\cos^2\phi}{r_0^2}+\frac{r^2\sin^2\phi}{r_0^2\sin^2\beta}=1\ \Rightarrow r_0=r(\phi)\sqrt{\cos^2\phi+\frac{\sin^2\phi}{\sin^2\beta}}$$

$$T=\left(\frac{GM_{sun}\dot{M}}{8\pi\sigma r_0^3}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{GM_{sun}\dot{M}}{8\pi\sigma r^3\left(\cos^2\phi+\frac{\sin^2\phi}{\sin^2\beta}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

با تعریف α همان‌طور که در سؤال گفته شد:

$$r=\alpha d$$

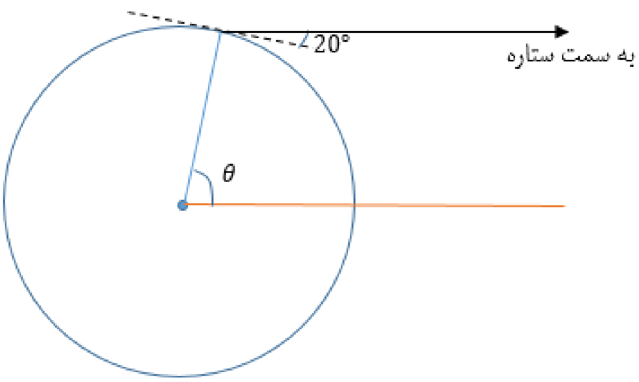
در نهایت

5 نمره

$$T=\left(\frac{GM_{sun}\dot{M}}{8\pi\sigma\alpha^3 d^3\left(\cos^2\phi+\frac{\sin^2\phi}{\sin^2\beta}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

2- آن سه شهری که باید ستاره مورد نظر را در یک ارتفاع ببینند قطعاً باید روی یک دایره صغیره باشند چرا که مکان هندسی نقاطی روی کره که از دید آن‌ها یک نقطه‌ی خاص در یک ارتفاع باشند یک دایره صغیره است. از آن‌جایی که از سه نقطه فقط یک دایره صغیره می‌گذرد و هر دایره صغیره خودش به نمایندگی از یک صفحه است نقطه چهارم به ناچار باید روی آن دایره صغیره باشد تا شرط هم صفحه بودن برآورده شود. پس تا این‌جا فهمیدیم چهار نقطه باید روی یک دایره صغیره باشند. حال باید شعاع دایره صغیره را بیابیم.

8 نمره



از شکل داریم

$$\theta=180-(90+20)=70°$$

حال می‌دانیم چهار نقطه روی دایره صغیره‌اند. از قطب این دایره صغیره به چهار نقطه وصل می‌کنیم، چهار مثلث تشکیل می‌شود. اگر فاصله زاویه‌ای دو به دو متوالی بین شهرها (یعنی اضلاع چهار ضلعی‌ای که از شهرها می‌گذرد) را از η_1 تا η_4 نام‌گذاری کنیم و زاویه رأسی از آن مثلث‌ها که از قطب دایره صغیره می‌گذرند را γ بنامیم از فرمول کسینوس‌ها داریم

2 نمره

$$\gamma_i = \cos^{-1}\left(\frac{\cos\eta_i - \cos^2 70}{\sin^2 70}\right)$$

از طرفی واضح است که چهار ضلعی بسته است در یک حالت که قطب دایره صغیره داخل چهار ضلعی بیفتد. جمع γ_i ها باید یک دور کامل شود:

7 نمره

$$\cos^{-1}\left(\frac{\cos\eta_1 - \cos^2 70}{\sin^2 70}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{\cos\eta_2 - \cos^2 70}{\sin^2 70}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{\cos\eta_3 - \cos^2 70}{\sin^2 70}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{\cos\eta_4 - \cos^2 70}{\sin^2 70}\right) = 360$$

حال خود η بر حسب طول و عرض جغرافیایی دو شهر فرضی 1 و 2 می‌شود

3 نمره

$$\cos\eta_{12} = \sin\phi_1 \sin\phi_2 + \cos\phi_1 \cos\phi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

پس ابتدا چهار شهر را که داریم چهار ضلعی گذرنده از آن‌ها را در نظر می‌گیریم. اگر اضلاع چهار ضلعی در شرط بالا صدق می‌کردند آن‌گاه می‌توان شرایط مسأله را برآورد کرد. حالتی دیگر این است که هر چهار رأس روی دایره صغیره باشند ولی قطب درون چهارضلعی نیفتد. در این حالت جمع γها کمتر از $360°$ می‌شود (چرا؟) ولی لااقل این را می‌دانیم که اگر شرط قبلی‌ای که به دست آوردیم برقرار باشد مسأله حل است ولی این تمام شرط‌ها نیست چون فقط حالتی را در نظر گرفتیم که قطب درون چهارضلعی بیفتد. ولی به هر حال یک حالت مسأله هست.

3- الف) ابتدا باید I_0 را تعیین کنیم. اگر فرض کنیم در حالت کلی زاویه خط عمود بر کهکشان با راستای دید i باشد آن‌گاه مساحتی که ما از عنصر سطحی از کهکشان می‌بینیم در واقع مساحت واقعی آن عنصر سطح است ضرب‌در $\cos i$. فرض می‌کنیم فاصله ما تا کهکشان برابر d باشد. آن گاه مساحت معادل یک ثانیه قوسی مربع ظاهری از کهکشان در واقع مساحت واقعیِ برابر با $\frac{d^2\left(\frac{1}{206265}\right)^2}{\cos i}$ روی سطح کهکشان است. از یک ثانیه قوسی مربع مرکز کهکشان قدر 25 می‌بینیم. روشنایی متناظر با این قدر را x می‌نامیم

2 نمره

1 نمره

$$20 - (-26.7) = -2.5\log_{10}\left(\frac{x}{b_{sun}}\right) \Longrightarrow x \approx 2.01 \times 10^{-19} b_{sun}$$

ولی داریم

$$x = \frac{L_0}{4\pi d^2}$$

که L_0 درخشندگی ناحیه مرکزی است و d فاصله ما تا کهکشان. پس

$$L_0 \approx 2.01 \times 10^{-19} \left(\frac{d}{1Au}\right)^2 L_{sun}$$

I_0 درخشندگی بر احد سطح واقعی کهکشان در مرکز است پس

2 نمره

$$I_0 = \frac{L_0}{\frac{d^2 \left(\frac{1}{206265}\right)^2}{\cos i}}$$

$$\approx 2.01 \times 10^{-19} \cos i \left(\frac{206265}{1.5 \times 10^{11} m}\right)^2 L_{sun}$$

حال که درخشندگی سطحی مرکزی را یافتیم به درخشندگی کل می‌پردازیم:

4 نمره

$$L_{tot} = \int_0^{\infty} I_0\, 2\pi r\, e^{-\frac{r}{r_*}}\, dr = 2\pi I_0 r_*^2$$

$$= 2\pi \times 2.01 \times 10^{-19} \cos i\, (206265)^4 \times 3500^2\, L_{sun}$$

همان‌طور که می‌بینیم شعاع را تا بی‌نهایت گرفتیم مگر اینکه خلافش ذکر شود. مدل نمایی است و به سرعت کاهش پیدا می‌کند.

$$M_{tot} = 4.72 - 2.5 \log_{10}(2\pi \times 2.01 \times 10^{-19} \cos i\, (206265)^4 \times 3500^2)$$

با جایگذاری مقدارِ i داریم:

$$M_{tot} \approx -21.28$$

2 نمره

از مدول فاصله قدر ظاهری را می‌یابیم

$$m_{tot} \approx 12.21$$

ب) درخشندگی کل کهکشان را یافتیم و می‌دانیم تمام ستاره‌ها خورشید گونند. پس تقسیمی ساده داریم:

2 نمره

$$N \approx 2\pi \times 2.01 \times 10^{-19} \cos i\, (206265)^4 \times 3500^2$$

$$\approx 2.52 \times 10^{10} \text{ ستاره}$$

ج) واضح است که فقط جرم روشن داخل کهکشان نداریم. ماده تاریک هم در نظر می‌گیریم.

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

3 نمره

$$\frac{2\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{GM}{r}} \sin 30 \Rightarrow \frac{0.2mm}{21cm} = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{GM}{10\ kpc}} \sin 30$$

$$\Rightarrow M \approx 1.90 \times 10^{11} M_{sun}$$

ضریب دو به خاطر این است که یک سری ستاره‌ها به سمت ما حرکت می‌کنند و یک سری دور می‌شوند و ما کهکشان را که به عنوان یک جسم نگاه می‌کنیم هر دوی این‌ها را می‌بینیم. پس

$$\frac{M}{L} \approx \frac{1.90 \times 10^{11}}{2.52 \times 10^{10}} \left(\frac{M_{sun}}{L_{sun}}\right) \approx 7.54 \frac{M_{sun}}{L_{sun}}$$

4 نمره

4- برای این‌که سرانجام قرار است ذرات غبار به بیرون منظومه شمسی و فواصل دور هدایت شود، نقاط دور دست را بررسی می‌کنیم. جایی که دما بسیار پایین است به طوری که فشار گاز کامل (توان یک از دما) را نسبت به فشار تابش (توان چهار از دما) قابل اغماض باشد. ضمن این که غبار هم کم فشار است. پس در معادله تعادل هیدرواستاتیک فقط نقش جمله تابشی را داریم:

4 نمره

$$\frac{dP}{dr} \approx \frac{dP_{rad}}{dr}$$
$$dI = -\kappa\rho I\, dr$$

و می‌دانی فشار تابشی عمود بر سطح به صورت زیر است

1 نمره

$$P_{rad} = \frac{I}{c} \Longrightarrow c\, dP_{rad} = -\kappa\rho I\, dr \Longrightarrow \frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c} I$$

که I شار تابشی‌ای است که از هر لایه می‌گذرد. از تعادل هیدروستاتیک که نشان دهنده تعادل داشتن سیستم است داریم

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}$$

1 نمره

حالت حدی‌ای که تابش با گرانش در تعادل باشد داریم

$$-\frac{GM\rho}{r^2} = -\frac{\kappa\rho}{c} I$$

I شاری است که به لایه موردنظر می‌رسد. برای این که کل سحابی به بیرون رانده شود یعنی باید پایین‌ترین لایه سحابی هم به بیرون رانده شود پس بررسی‌ها را فعلاً برای این پایین‌ترین لایه انجام می‌دهیم لذا دیگر جذبی سر راهش نبوده و لازم نیست I را تصحیح کنیم

$$\frac{GM_{sun}}{r^2} = \frac{\kappa}{c} \frac{L_{sun}}{4\pi r^2}$$

منطقیست که κ اگر از مقدار فوق بیشتر باشد یعنی جذب بیشتر انجام می‌شود و فشار بیشتری وارد می‌کند لذا به سمت بیرون منظومه شمسی حرکت داریم. پس شرط این طور می‌شود

5 نمره

$$\kappa > \frac{4\pi G M_{sun} c}{L_{sun}}$$

و اما برای لایه‌های بیرونی و نزدیک کرانه پایانی منظومه شمسی باید اثر کم شدن تابش را اعمال کنیم:

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\kappa\rho \int_{R_{sun}}^{R_{Sol}} dr \approx -\kappa\rho R_{Sol} \Longrightarrow \frac{GM\rho}{r^2} = \frac{\kappa\rho}{c} \frac{L_{sun}}{4\pi r^2} e^{-\kappa\rho R_{Sol}}$$

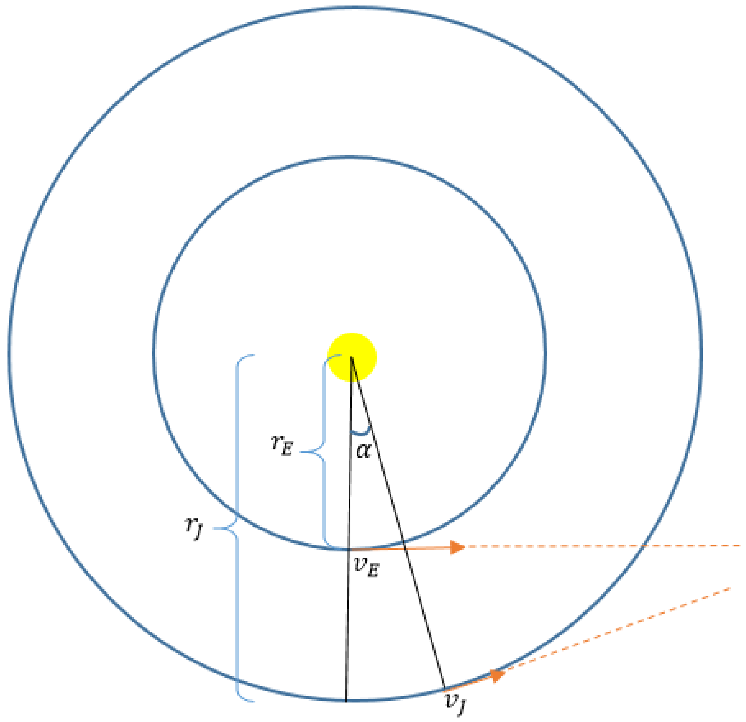
$$\kappa > \frac{4\pi G M_{sun} c}{L_{sun}} e^{\kappa \rho R_{Sol}}$$

باید κ که ثابت هم هست طوری باشد که در نامساوی بالا صدق کند. دو تابع $y = \kappa$ و $y = \frac{4\pi G M_{sun} c}{L_{sun}} e^{\kappa \rho R_{Sol}}$ را درنظر می‌گیریم. اگر κ هایی یافت شدند که نمودار تابع خطی بالاتر از نمایی قرار گیرند، شرط قابلیت برآورده شدن را دارد وگرنه خیر. در $\kappa = 0$ که تابع خطی مقدار صفر دارد و تابع نمایی مقداری مثبت و تا اینجا شرط برآورده نیست. از طرفی شیب تابع خطی در مبدأ نمودار برابر یک و در تابع نمایی تقریباً 19500 است!! می‌دانیم شیب نمودار نمایی با افزایش کدریت زیاد می‌شود و دیگر امکان برخوردی با نمودار خطی نخواهد بود لذا هیچگاه شرط لایه بیرونی برآورده نمی‌شود ولی به ازای κهای بزرگتر از حدود 1300 شرط لایه درونی برآورده می‌شود لذا احتمالاً به حالتی بر می‌خوریم که لایه درونی مایل به حرکت است و لایه بیرونی خیر و شاید یک شرایط غیر تعادلی پیش بیاید.

9 نمره

5- فرض می‌کنیم در لحظه‌ی حال زاویه بین مشتری و زمین از دید خورشید α باشد. بعد از حذف گرانش خورشید سیارات در مسیر خط راست به حرکت خود ادامه می‌دهند.

1 نمره



فاصله‌های مشتری و زمین بعد از یک سال (r'_E و r'_J) را از خورشید به دست می‌آوریم:

2 نمره

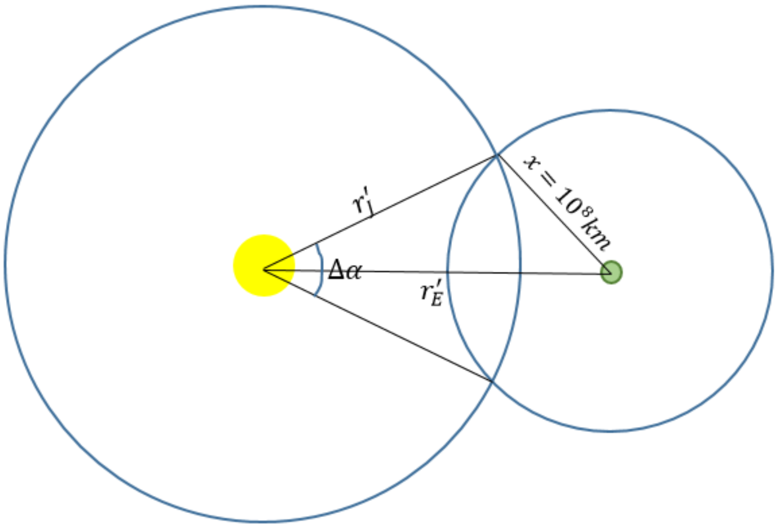
$$r'_E = \sqrt{r_E^2 + v_E^2 t^2} \approx 6.34\ Au$$

2 نمره

$$r'_E = \sqrt{r_J^2 + v_J^2 t^2} \approx 5.88\ Au$$

حال به جای این‌که قانون کسینوس‌ها بنویسیم و خود را در بازیِ مثبت و منفی بودن بازه‌ها بیندازیم از روش هندسی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم بعد از یک سال اگر دور زمین یک دایره به شعاع صدمیلیون کیلومتر بزنیم و مشتری درون آن باشد شرط برآورده می‌شود. از طرفی به ازای αهای مختلف مشتری بعد از یک سال جاهای مختلفی قرار می‌گیرد ولی مکان هندسی همه آن‌ها یک دایره به شعاع حدود $5.88\ Au$ است. پس اگر دایره‌ای به مرکزیت خورشید و شعاع $5.88\ Au$ دایره‌ای به مرکزیت زمین (بعد از یک سال) و شعاع صدمیلیون کیلومتر را در دو نقطه قطع کرد حتماً به ازای αهایی خاص شرط برآورده می‌شود.

7 نمره



چون به ازای هر αای دقیقاً یک نقطه مکان مشتری بعد از یک سال است پس منطقی است که زاویه قطاع کشیده شده در شکل $\Delta\alpha$ باشد. با کسینوس‌ها $\Delta\alpha$ را می‌یابیم.

3 نمره

$$x^2 = r_E'^2 + r_J'^2 - 2r_E' r_J' \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \Longrightarrow \Delta\alpha \approx 9.098°$$

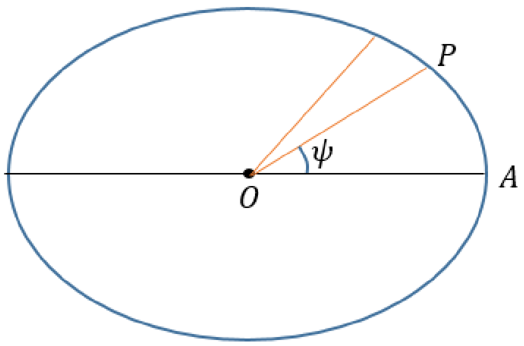
پس احتمال مورد نظر می‌شود

$$\frac{\Delta\alpha}{360} \approx 2.53\%$$

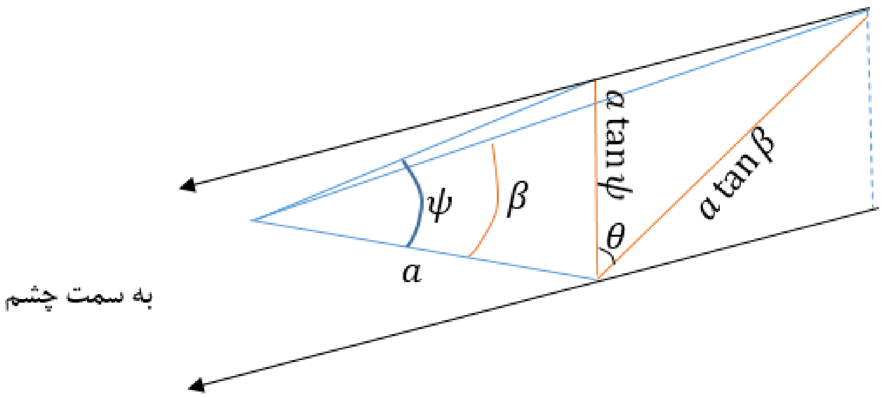
5 نمره

6- می‌دانیم شکل دایره کج شده را بیضی می‌بینیم. جهت اندازه گیری زاویه را مطابق شکل زیر تعریف می‌کنیم.

1 نمره



هدف این است که اگر زاویه $A\hat{O}P$ را روی دایره واقعی داشته باشیم زاویه تصویر شده آن (ψ) را بیابیم. زاویه واقعی را β می‌نامیم. شکل نحوه تصویر شدن را به نمایش گذاشته است.



5 نمره

که θ زاویه بین راستای دید و خط عمود بر صفحه دایره است.

$$a\tan\psi = a\tan\beta\cos\theta \implies \tan\psi = \tan\beta\cos\theta$$

حال دو پاره‌خط داریم که $\Delta\beta$شان برابر با α است و $\Delta\psi$ متناظرشان را می‌خواهیم. اگر زاویه پاره خط پایینی (مثلاً OP) را با نیم محور بزرگ همان β بنامیم:

3 نمره

$$\Delta\psi = \tan^{-1}(\tan(\beta+\alpha)\cos\theta) - \tan^{-1}(\tan\beta\cos\theta)$$

2 نمره

هم شهودی می‌توان گفت هم با محاسبات که وقتی $\beta = -\frac{\alpha}{2}$ آن‌گاه $\Delta\psi$ کمینه است.

با محاسبات:

$$\frac{d(\Delta\psi)}{d\alpha} = 0 \implies \frac{\sec^2(\beta+\alpha)\cos\theta}{1+\tan^2(\beta+\alpha)\cos^2\theta} = \frac{\sec^2(\beta)\cos\theta}{1+\tan^2(\beta)\cos^2\theta}$$

چون که شهودمان به ما جواب $\beta = -\frac{\alpha}{2}$ را پیشنهاد می‌کند و به نظر می‌رسد نحوه زیاد شدن زاویه با افزایش β پیوستگی دارد لذا جواب موردنظر را در معادله بالا می‌گذاریم و می‌بینیم جواب می‌دهد پس درست حدس زدیم. حال باید به زمان تبدیل کنیم:

2 نمره

$$\beta(t) = \omega t - \frac{\alpha}{2}$$

در نهایت

7 نمره

$$\Delta\psi(t) = \tan^{-1}\left(\tan\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\theta\right) - \tan^{-1}\left(\tan\left(\omega t - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\theta\right)$$

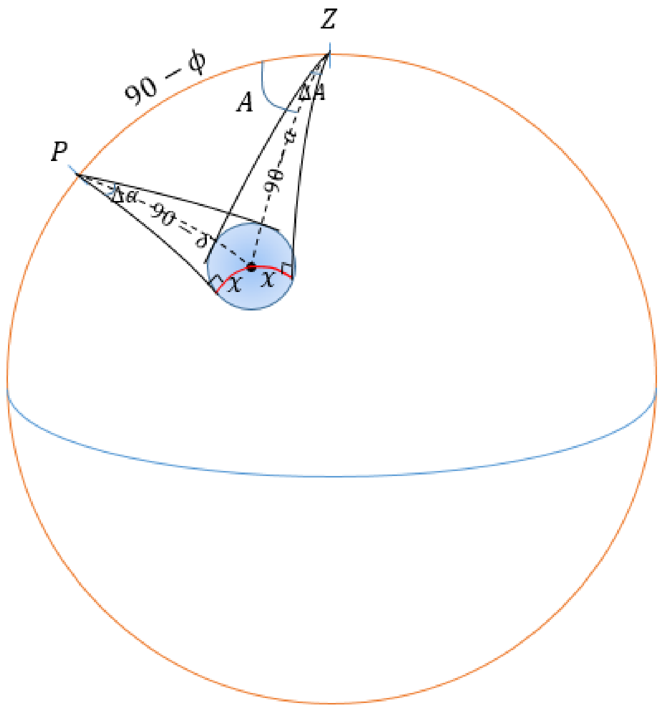
7- ابتدا شعاع زاویه ماه کامل را به دست می‌آوریم

2 نمره

$$x \approx \frac{1738km}{384000km} \approx 0.26°$$

2 نمره

بیشینه سمت و بعد جاهایی است که به دایره صغیره مماس کنیم



$$\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \frac{\sin x}{\cos\delta} \implies \Delta\alpha \approx 0.521^\circ$$

$$\sin\left(\frac{\Delta A}{2}\right) = \frac{\sin x}{\cos a} \quad , \quad \Delta A = 2\Delta\alpha$$

پس

6 نمره

$$a \approx 60.13^\circ$$

حال سمت غربی ماه را پیدا می‌کنیم:

2 نمره

$$\sin\delta = \sin\phi \sin a + \cos\phi \cos a \cos A \implies A$$
$$\approx 143.42^\circ \text{ غربی}$$

چون که می‌توان از ابعاد زمین در مقایسه با فاصله زمین– ماه چشم پوشید می‌توان گفت خورشید با تقریب خوبی نقطه مقابل ماه روی کره سماوی است. یعنی در لحظه رصد:

3 نمره

$$a_{sun} \approx -60.13^\circ \qquad A_{sun} \approx 36.58^\circ \text{شرقی}$$

حال باید زاویه ساعتی خورشید را بیابیم. از چهارجزئی:

5 نمره

$$\sin\phi \cos A_{\text{غربی}} = \cos\phi \tan a - \frac{\sin A_{\text{غربی}}}{\tan H}$$

$$H \approx 13h\ 9m$$

پس ساعت حدود $1:9$ بامداد است.

التماس دعا

یا علی