به نام خداوند بخشنده‌ی مهربان

# "پاسخ‌نامه مجموعه سوالات عدسی گرانشی"


***تهیه و تنظیم : اعضای تیم نهمین المپیاد جهانی نجوم و اخترفیزیک***

**توضیحات: این پاسخنامه بیشتر در قالب درسنامه تنظیم شده است به طوری که میتوانید از آن به عنوان یک مرجع استفاده کنید. مطالبی نیز اضافه بر پاسخ سوالات در آن آورده شده که برای فهم بیشتر مطالب است و در صورت عدم تمایل می‌توانید از مطالعه آن بخش‌ها چشم-پوشی کنید.**

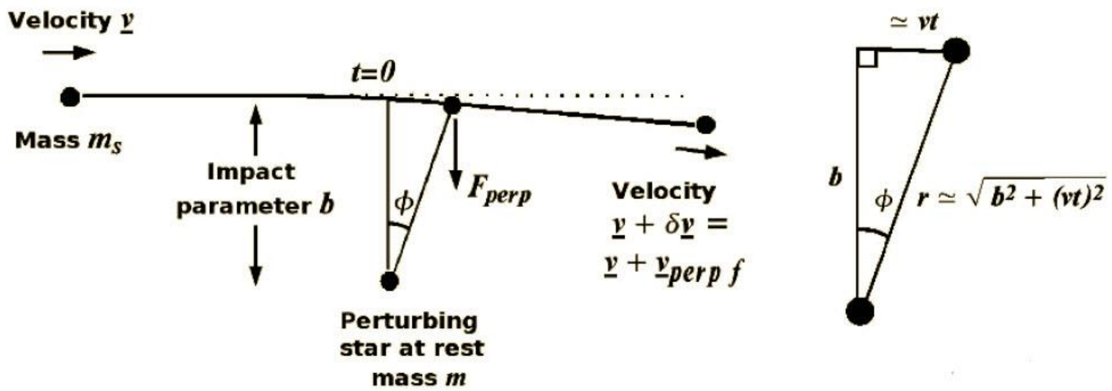
**به امید موفقیت شما در کلیه آزمون‌های زندگی**

**"نهمین تیم المپیاد جهانی نجوم و اخترفیزیک"**

**پاسخ بخش اول:**

**قسمت الف:**

با در نظر گرفتن نور به عنوان یک ذره، مسیر آن در غیاب جرم $M$ یک خط خواهد بود که از فاصله عمودی $b$ از جرم $M$ می‌گذرد. حال اثر جرم $M$ اینگونه است که مسیر نور را به اندازه زاویه $\delta$ منحرف می‌کند.




همان طور که از شکل بالا معلوم است، نیروی وارد شده به نور دارای دو مولفه است:

$$F_{||} = \frac{GMm}{r^2}\sin\phi$$

$$F_p = \frac{GMm}{r^2}\cos\phi$$

چون زاویه $\phi$ بسیار کوچک است، پس نیروی موازی وارد شده به ذره برابر صفر خواهد بود و اثر جسم دوم به صورت یک نیروی اختلالی به اندازه $F_p$ روی نور ظاهر می‌شود. پس با توجه به شکل داریم:

$$\cos\phi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + v^2t^2}} \rightarrow F_p = \frac{GMmb}{r^3} = \frac{GMmb}{(b^2 + v^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_p = m\frac{dv_p}{dt} \rightarrow \frac{dv_p}{dt} = \frac{GMb}{(b^2 + v^2t^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow v_p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{GMb}{(b^2 + v^2t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$$

می‌دانیم سرعت عمودی اولیه ذره نیز برابر صفر است.

برای محاسبه انتگرال از تغیر متغیر زی استفاده میکنیم :

$$\tan x = \frac{vt}{b} \rightarrow \sec^2 x\, dx = \frac{vdt}{b}$$

در نتیجه :

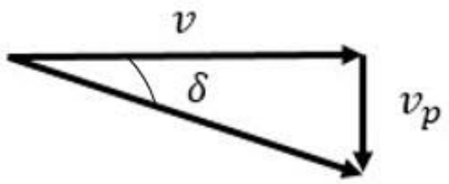
$$v_p = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Gmb}{(b^2 + b^2 \tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \sec^2\theta \left(\frac{b}{v} d\theta\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{GM}{bv} \frac{\sec^2\theta}{(1 + \tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

$$\rightarrow v_p = \frac{GM}{bv} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta} d\theta = \frac{GM}{bv} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta$$

و با محاسبه انتگرال فوق داریم:

$$v_p = \frac{2GM}{bv}$$

حال با توجه به شکل زیر، اگر سرعت ذره در ابتدا برابر $v$ باشد، به خاطر این سرعت عمودی یک انحراف به اندازه $\delta$ به صورت زیر در مسیر آن ایجاد می‌شود:




$$\tan\delta \approx \delta = \frac{v_p}{v} \rightarrow \delta = \frac{2GM}{bv^2}$$

و اگر ذره مورد نظر ما نور باشد :

$$\delta = \frac{2GM}{bc^2}$$

روش دوم : اگر نور را به عنوان یک ذره در نظر بگیریم که از بینهایت به سوی جرم $M$ در حال حرکت است، مسیر آن تحت تاثیر نیروی گرانش به صورت یک هذلولی خواهد شد. حال پارامترهای مداری این هذلولی را حساب می‌کنیم.

با نوشتن معادله انرژی و تکانه زاویه‌ای در بینهایت داریم:

$$E = \frac{1}{2}mc^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mc^2 \rightarrow \frac{1}{2}mc^2 = \frac{GmM}{2a} \rightarrow a = \frac{GM}{c^2}$$

$$h = \sqrt{GMa(e^2 - 1)} \rightarrow bc = \sqrt{GMa(e^2 - 1)} \rightarrow \frac{b^2c^2}{GMa} = e^2 - 1$$

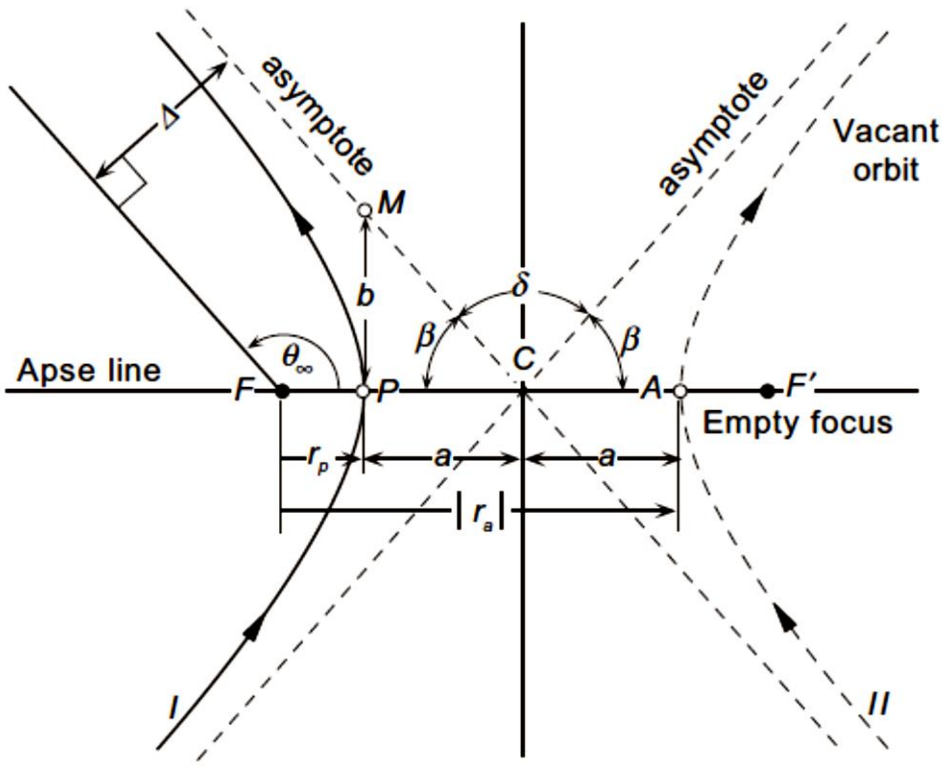
با توجه به این که مدار نور تقریبا خط است، خروج از مرکز بسیار بزرگ است؛ پس داریم:

$$e^2 - 1 \approx e^2 \rightarrow e^2 = \frac{b^2c^2}{GMa} \rightarrow e^2 = \frac{b^2c^4}{G^2m^2} \rightarrow e = \frac{bc^2}{GM}$$

حال با توجه به رابطه $\theta_\infty$ برای هذلولی داریم:

$$\cos\theta_\infty = -\frac{1}{e} \rightarrow \theta_\infty = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$$

$$\rightarrow \beta = (\pi - \theta_\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \rightarrow \cos(\pi - \theta_\infty) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right) \rightarrow -\cos\theta_\infty = \sin\frac{\delta}{2}$$




و چون $\delta$ کوچک است داریم:

$$\sin\frac{\delta}{2} \approx \frac{\delta}{2} \rightarrow \frac{\delta}{2} = -\cos\theta_\infty \rightarrow \delta = 2 \times \left(\frac{1}{e}\right) \rightarrow \delta = \frac{2GM}{bc^2}$$

دقت کنید که زاویه انحراف برابر با زاویه بین امتداد مسیر اولیه پرتو و مسیر نهایی آن یا همان $\delta$ است و زاویه $\beta$ برابر زاویه انحراف نیست.

و طبق صورت سوال، تصحیحات مربوط به نسبیت عام به ما می‌گوید که زاویه انحراف نور به صورت زیر خواهد شد:

$$\delta = \frac{4GM}{bc^2}$$

در ادامه از مقدار نسبیتی زاویه انحراف استفاده خواهیم کرد.

**قسمت ب:**

در حالتی که عدسی و منبع روی یک خط باشند داریم:

$$\theta D_L = b$$

و با توجه به روابط مثلثاتی، برای زاویه $\gamma$ داریم:

$$\gamma = \delta - \theta = \frac{b}{D_{LS}} \rightarrow b = (\delta - \theta) D_{LS}$$

پس:

$$\theta D_L = \delta D_{LS} - \theta D_{LS} \rightarrow \theta(D_L + D_{LS}) = \delta D_L \rightarrow \theta = \delta \frac{D_{LS}}{D_S}$$

حال با جایگذاری $\delta$ در معادله فوق:

$$\theta = \frac{4GM}{bc^2} \frac{D_{LS}}{D_S} = \frac{4GM}{(\theta D_L)c^2} \frac{D_{LS}}{D_S} \rightarrow \theta^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}$$

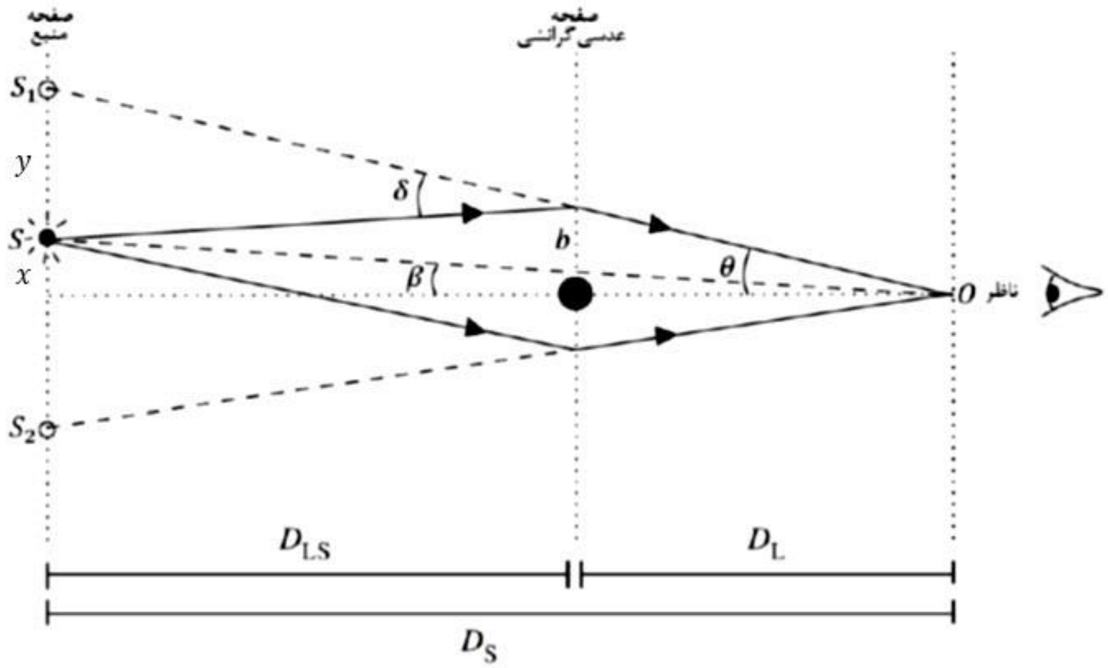
به $\theta$ هنگامی که منبع و عدسی و چشمه روی یک خط باشند، شعاع انیشتین گویند. بنابراین:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}$$

در حالت هم‌خط بودن چشمه و ناظر و عدسی، بدلیل این که تمام پرتوهای خروجی وضعیت مشابهی با هم دارند و تنها دوران یافته‌اند (بدلیل تقارن. در واقع پرتوهای خروجی یک مخروط را تشکیل می‌دهند که خط واصل عدسی و ناظر و چشمه محور تقارن آن است پس کلیه پرتوها با فاصله زاویه‌ای یکسان نسبت به این خط از منبع خارج می‌شوند.) در نتیجه تمام پرتوهای خروجی به یک اندازه منحرف شده و اگر امتداد این پرتوهای خمیده را به صفحه آسمان ناظر وصل کنیم، کلیه پرتوها در یک فاصله زاویه‌ای ثابت نسبت به منبع به این صفحه خواهند رسید؛ پس شکل هندسی تصویر یک حلقه به شعاع $\theta_E$ خواهد بود.

**قسمت پ:**

در این حالت برای پارامتر های $x$ و $y$ که روی شکل مشخص شده‌اند، داریم:




$$x = \beta D_S$$

$$y = \delta D_{LS}$$

$$y + x = \theta D_S$$

پس با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\theta D_S = \delta D_{LS} + \beta D_S \rightarrow \theta = \delta \frac{D_{LS}}{D_S} + \beta$$

و همچنین با قرار دادن عبارت مناسب برای $\delta$ :

$$\theta = \frac{4GM}{bc^2}\frac{D_{Ls}}{D_S} + \beta$$

می‌دانیم:

$$\theta D_L = b$$

در نتیجه:

$$\theta = \frac{4GM}{(\theta D_L)c^2}\frac{D_{LS}}{D_s} + \beta \rightarrow \theta = \frac{\theta_E^2}{\theta} + \beta \rightarrow \theta^2 - \theta\beta - \theta_E^2 = 0$$

که با حل معادله درجه دوم فوق، رابطه نهایی برای محل دو تصویر به صورت زیر خواهد بود:

$$\theta_+ = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \theta_E^2}$$

$$\theta_- = \frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \theta_E^2}$$

از روی جواب‌های فوق، می‌توانید به این نتیجه نیز برسید که همواره یک تصویر درون شعاع انیشتین عدسی و یک تصویر بیرون آن تشکیل می‌شود. یعنی:

$$\theta_+ > \theta_E \,, \theta_- < \theta_E$$

**قسمت ت**: با استفاده از رابطه عدسی گرانشی:

$$\theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0 \rightarrow 2\theta(\delta\theta) - \beta(\delta\theta) - (\delta\beta)\theta = 0$$

$$\rightarrow \delta\theta(2\theta - \beta) = (\delta\beta)\theta \rightarrow \frac{\delta\theta}{\delta\beta} = \frac{\theta}{2\theta - \beta} \rightarrow \frac{\delta\theta}{\delta\beta} = \frac{\frac{\theta}{\beta}}{\frac{2\theta}{\beta} - 1} \rightarrow \frac{\delta\theta}{\delta\beta} = \frac{\eta}{2\eta - 1}$$

و همچنین چون $\eta$ برای دو تصویر مقدار متفاوتی دارد، بزرگنمایی تصاویر ایجاد شده نیز متفاوت خواهد بود.

**بخش دوم:**

**قسمت اول:**

در صورت سوال گفته شده است که به خاطر اثر لنزینگ قدر سطحی جسم ثابت می‌ماند. ابتدا این نکته را اثبات می‌کنیم: ( این قسمت اختیاری است در صورت متوجه نشدن برخی از عبارت‌ها میتوانید آن را مطالعه نکنید.)

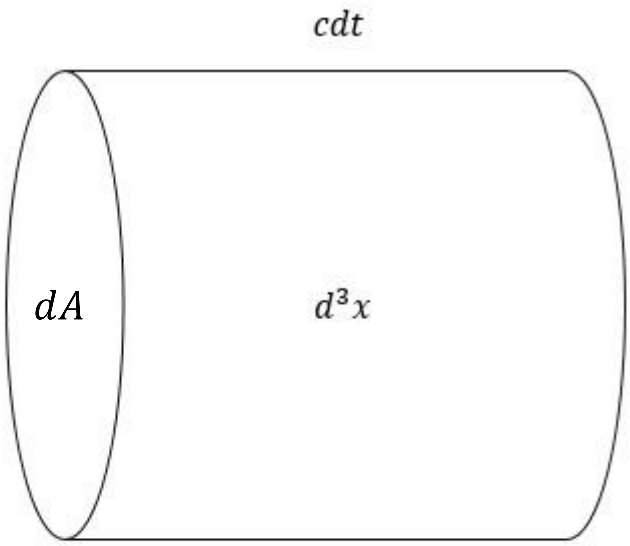
در فضای فاز، کمیت $f(\vec{x},\vec{p})$ را تابع توزیع ذرات می‌نامند اگر $f(\vec{x},\vec{p})d^3xd^3p$ تعداد ذراتی باشد که تکانه آنها بین $\vec{p}$ و $\vec{p} + d\vec{p}$ و مکان آنها بین $\vec{x}$ و $\vec{x} + d\vec{x}$ است. در واقع $f(\vec{x},\vec{p})$ نشان‌دهنده چگالی عددی ذرات در فضای فاز است. بنابراین:

$$f(\vec{x},\vec{p}) = \frac{dN}{d^3x\, d^3p}$$

که $d^3p\ d^3x$ نشان‌دهنده حجم در فضای فاز است. چون فوتون‌ها از توزیع جسم سیاه پیروی می‌کنند داریم:

$$I = \frac{dE}{d\nu\ dt\ dA\ d\Omega}$$

حال اگر همانند شکل زیر یک سطح مقطع از فوتون‌ها را در نظر بگیریم که در زمان $dt$ حجم $d^3x$ را جاروب می‌کنند خواهیم داشت :




$$d^3x = dA(cdt)$$

همچنین می‌دانیم انرژی فوتون‌ها با تعداد آنها به صورت زیر در ارتباط است:

$$dE = dN \times E_\gamma = dN(h\nu)$$

$$\rightarrow f(\vec{x},\vec{p}) = \frac{dE}{h\nu c\ dt\ dA\ d^3p}$$

حال اگر دیفرانسیل حجم مربوط به تکانه را در دستگاه کروی بنویسیم:

$$d^3p = dp_x dp_y dp_z = p^2 d\Omega dp$$

$$\rightarrow f(\vec{x},\vec{p}) = \frac{dE}{h\nu c\ dt\ dA\ p^2 d\Omega\ dp}$$

اکنون باید تکانه فوتون را حساب کنیم:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \rightarrow dp = \frac{h}{c}\ d\nu$$

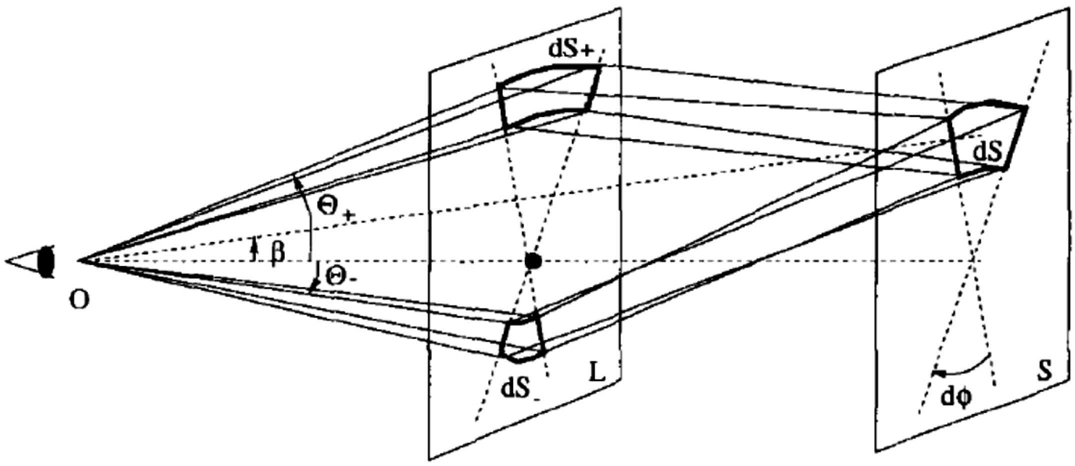
$$\rightarrow f(\vec{x},\vec{p}) = \frac{dE}{h\nu c\, dt\, dA \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 d\Omega \left(\frac{h}{c} d\nu\right)} \rightarrow f(\vec{x},\vec{p}) = \frac{dE}{d\nu\, dt\, dA\, d\Omega} \frac{c^2}{h^3 \nu^3}$$

$$\rightarrow f(\vec{x},\vec{p}) = \frac{I}{\nu^3} \frac{c^2}{h^3}$$

اما در شرایط لنزینگ اگر از انبساط کیهان صرف‌نظر کنیم طبق قضایای مربوط به مکانیک هامیلتونی تابع توزیع در فضای فاز باید ثابت بماند و از آنجا که فرکانس نور تغییر نمی‌کند داریم:

$$f(\vec{x},\vec{p}) = cte \rightarrow I = cte$$

با توجه به اینکه قدر سطحی ثابت می‌ماند، پس شار رسیده از جسم به مساحت ظاهری جسم بستگی دارد. شکل زیر، این اثر را به طور کلی نشان می‌دهد. اگر یک دستگاه مختصات تخت روی صفحه آسمان قرار دهیم، میزان تقویت نوری ناشی از تصویر مثبت برابر است با:




$$S = D_S^2 d\Omega \rightarrow \frac{S_+}{S_0} = \frac{d\Omega_+}{d\Omega_0}$$

$$F \propto S \rightarrow \frac{F_+}{F_0} = \frac{S_+}{S_0} \rightarrow A_+ = \frac{\theta_+ d\theta_+ d\phi}{\beta d\beta d\phi} \rightarrow A_+ = \frac{\theta_+}{\beta} \frac{d\theta_+}{d\beta}$$

و همچنین برای تصویر منفی:

$$\frac{F_-}{F_0} = \frac{S_-}{S_0} \rightarrow A_- = \frac{\theta_- d\theta_- d\phi}{\beta d\beta d\phi} \rightarrow A_- = \frac{\theta_-}{\beta} \frac{d\theta_-}{d\beta}$$

در نتیجه میزان کل تقویت نوری در اثر پدیده لنزینگ برابر است با:

$$A_t = A_+ + |A_-|$$

چون در اثر لنزینگ سطح مقطع تصویر دوم کم می‌شود، ضریب $A$ برای آن منفی خواهد بود؛ به همین خاطر باید برای تصویر کوچک‌تر، قدرمطلق میزان افزایش روشنایی را در نظر بگیریم. در واقع به‌جای اینکه روشنایی واقعی را رصد کنیم، مجموع دو روشنایی از دو تصویر را رصد خواهیم کرد.

با توجه به رابطه عدسی گرانشی:

$$\theta_+ = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2} \rightarrow \frac{d\theta_+}{d\beta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\sqrt{(\beta)^2 + 4\theta_E^2}}$$

$$\theta_- = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2} \rightarrow \frac{d\theta_-}{d\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\sqrt{(\beta)^2 + 4\theta_E^2}}$$

پس با جایگذاری در رابطه ای که بدست آوردیم، داریم :

$$A_+ = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\sqrt{(\beta)^2 + 4\theta_E^2}}\right)\left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2\beta}\right)$$

$$\rightarrow A_+ = \frac{1}{4\beta}\left(\beta + \frac{\beta^2}{\sqrt{(\beta)^2 + 4\theta_E^2}} + \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} + \beta\right)$$

$$A_+ = \frac{1}{4\beta}\left(2\beta + \frac{2\beta^2 + 4\theta_E^2}{\sqrt{(\beta)^2 + 4\theta_E^2}}\right) \rightarrow A_+ = \frac{1}{2} + \frac{2\beta^2 + 4\theta_E^2}{2\beta\sqrt{(\beta)^2 + 4\theta_E^2}}$$

$$A_- = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\sqrt{(\beta)^2 + 4\theta_E^2}}\right)\left(\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}\right)$$

$$\rightarrow A_- = \frac{1}{4\beta}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} - \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} + \beta\right)$$

$$A_- = \frac{1}{4\beta}\left(2\beta - \frac{2\beta^2 + 4\theta_E^2}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}\right) \rightarrow A_- = \frac{1}{2} - \frac{2\beta^2 + 4\theta_E^2}{2\beta\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}$$

$$\rightarrow A_t = A_+ + |A_-| = \frac{\beta^2 + 2\theta_E^2}{\beta\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}$$

اگر کمیت $u$ را به صورت زیر تعریف کنیم، داریم:

$$u = \frac{\beta}{\theta_E} \rightarrow A_t = \frac{u^2\theta_E^2 + 2\theta_E^2}{u\theta_E\sqrt{u^2\theta_E^2 + \theta_E^2}} \rightarrow A_t = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}$$

**قسمت ب:**

با توجه به اینکه فاصله ستاره‌ها در ابعاد کهکشانی بسیار زیاد است، ستاره‌ها عموما در فضای خالی حرکت می‌کنند. پس مسیر حرکت آنها در صفحه آسمان ناظر، یک خط خواهد شد که ستاره با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\beta}$ روی آن حرکت می‌کند. حال اگر کمترین فاصله زاویه‌ای عدسی و چشمه $\beta_0$ باشد:

$$\beta(t)^2 = \beta_0^2 + \dot{\beta}^2 t^2 \rightarrow \beta(t) = \sqrt{\beta_0^2 + \dot{\beta}^2 t^2}$$

حال با توجه به رابطه روشنایی:

$$A_t = \frac{\beta^2 + 2\theta_E^2}{\beta\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} \rightarrow A_t = \frac{\beta_0^2 + \dot{\beta}^2 t^2 + 4\theta_E^2}{\sqrt{\beta_0^2 + \dot{\beta}^2 t^2}\sqrt{\beta_0^2 + \dot{\beta}^2 t^2 + 4\theta_E^2}}$$

اگر قدر ستاره در غیاب اثر لنزینگ $m_0$ باشد :

$$m - m_0 = -2.5 \log \frac{F}{F_0} \rightarrow m - m_0 = -2.5 \log A_t$$

$$\rightarrow m(t) = m_0 - 2.5 \log \left( \frac{\beta_0^2 + \dot{\beta}^2 t^2 + 4\theta_E^2}{\sqrt{\beta_0^2 + \dot{\beta}^2 t^2}\sqrt{\beta_0^2 + \dot{\beta}^2 t^2 + 4\theta_E^2}} \right)$$

**قسمت پ:**

ابتدا ثابت می‌کنیم که میزان اختلاف قدر هنگامی بیشینه خواهد شد که فاصله زاویه‌ای منبع و عدسی کمینه باشد. برای این کار از رابطه افزایش روشنایی مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dA_t}{dt} = \frac{2\beta \frac{d\beta}{dt}\left(\beta\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}\right) + \frac{d\beta}{dt}\left\{\left(\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}\right) + \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}\right\}(\beta^2 + 2\theta_E^2)}{\beta^2(\beta^2 + 4\theta_E^2)}$$

$$\rightarrow \frac{d\beta}{dt}\{2\beta^2(\beta^2 + 4\theta_E^2) + (\beta^2 + 4\theta_E^2 + \beta^2)(\beta^2 + 2\theta_E^2)\} = 0$$

پس برای اینکه اختلاف روشنایی بیشینه شود، باید داشته باشیم:

$$\frac{d\beta}{dt} = 0$$

پس $\beta$ باید کمینه و برابر $\beta_0$ باشد.

با توجه به نمودار، کمترین قدر و قدر اولیه ستاره است با:

$$m_{mi} = 14.39\,, m_0 = 15.24$$

$$m_{mi} - m_0 = -2.5\log A_t \rightarrow A_t = 2.187$$

حال با توجه به تعریف $A_t$ داریم:

$$A_t = \frac{u^2+2}{u\sqrt{u^2+4}} \rightarrow u^2(u^2+4)A_t^2 = (u^2+2)^2$$

$$\rightarrow u^4A_t^2 + 4u^2A_t^2 = u^4 + 4u^2 + 4 \rightarrow u^4(A_t^2 - 1) + u^2(4A_t^2 - 4) - 4 = 0$$

اگر کمیت $x^2$ را به صورت زیر تعریف کنیم، آنگاه:

$$x^2 = u^4 \rightarrow u = \pm\sqrt{x} \rightarrow x^2(A_t^2 - 1) + x(4A_t^2 - 2) - 4 = 0$$

پس از حل معادله فوق:

$$u = \frac{\beta_0}{\theta_E} = 0.498 \rightarrow \theta_E = \frac{\beta_0}{0.498} \rightarrow \theta_E = 4.86 \times 10^{-9}\ (rad)$$

و طبق تعریف $\theta_E$ داریم:

$$\theta_E = \frac{4GM}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_LD_S} \rightarrow M = \frac{\theta_E^2c^2}{G}\frac{D_LD_S}{D_{LS}} \rightarrow M = 2.87 \times 10^{31}kg$$

$$\rightarrow M = 14.5\ M_{sun}$$

قسمت د: با توجه به این که $\beta$ و $\dot{\beta}$ طبق رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\beta(t)^2 = \beta_0^2 + \dot{\beta}^2t^2$$

و اینکه $\beta_0$ را می‌دانیم، می‌توانیم با تعیین $\beta$ در یک زمان دلخواه، $\dot{\beta}$ را تعیین کنیم. نکته قابل توجه این است که در رابطه بالا، زمان صفر زمانی است که منبع به کمترین فاصله زاویه‌ای خود از عدسی می‌رسد. پس این نکته را نیز باید در تعیین $t$ در نظر گرفت. به عبارتی $t$ اختلاف زمانی بین زمان مشاهده و لحظه‌ای است که فاصله زاویه‌ای منبع و عدسی کمینه می‌شود.

با توجه به نمودار هنگامی که فاصله زاویه‌ای کمینه می‌شود:

$$t_0 = 394 \text{ روز}$$

و هنگامی که قدر ظاهری منبع برابر 15 می‌شود:

$$t_1 = 509 \text{ روز}$$

$$m_1 - m_0 = -2.5 \log A_1 = 15 - 15.24 \rightarrow A_1 = 1.247$$

و طبق رابطه ای که بین $u$ و $A$ بدست آوردیم:

$$u_1^4(A_1^2 - 1) + u_1^2(4A_1^2 - 4) - 4 = 0$$

$$\rightarrow u_1 = 1.160$$

طبق تعریف $u_1$ :

$$u_1 = \frac{\beta_1}{\theta_E} \rightarrow \beta_1 = 5.64 \times 10^{-9}\ (rad)$$

$$\rightarrow \beta_1^2 = \beta_0^2 + \dot{\beta}(t_1 - t_0)^2 \rightarrow \dot{\beta} = \frac{\sqrt{\beta_1^2 - \beta_0^2}}{t_1 - t_0}$$

$$\rightarrow \dot{\beta} = 9.13 \times 10^{-3}\ \left(\frac{marcsec}{day}\right)$$

که بر حسب واحدهای معمول:

$$\beta = 3.335\ \left(\frac{marcsec}{yr}\right)$$

**بخش سوم:**

**قسمت الف:**

با توجه به توضیحات سوال و شکلی که در ادامه و در قسمت‌های بعدی آورده شده است، مشخص می‌شود که زاویه $\gamma$ برابر زاویه بین بردار $\chi$ و بردار $\eta$ است.

پس اگر در مثلث شکل بالا رابطه کسینوس‌ها را بنویسیم:

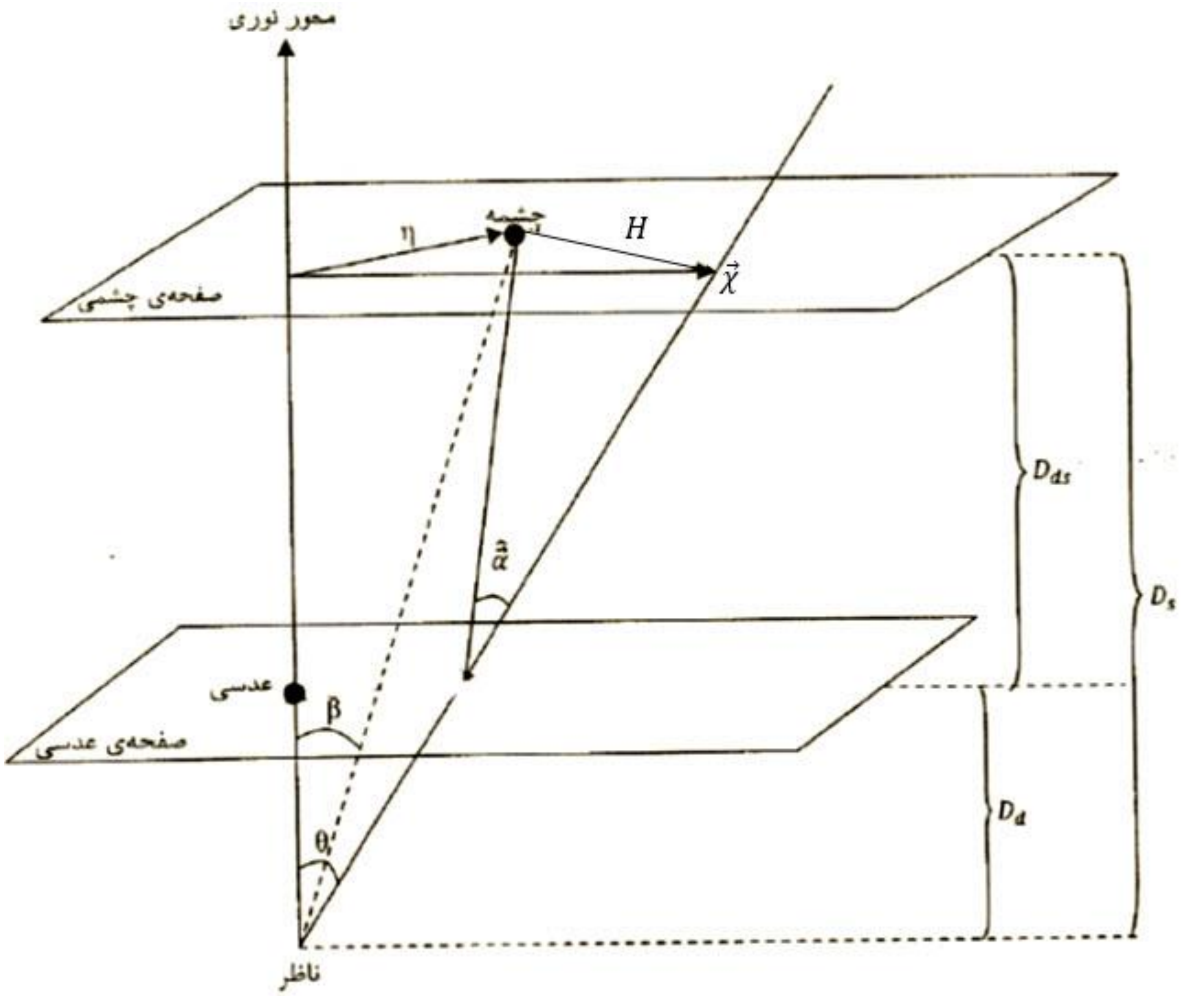
$$H^2 = \eta^2 + \chi^2 - 2\eta\chi\cos\gamma$$

و با توجه به شکل:

$$\eta = \beta D_S$$

$$\chi = \theta D_S$$

$$H = \alpha D_{LS}$$




که $\alpha$ همان زاویه انحراف یا $\delta$ در بخش‌های قبلی است. و همچنین $\eta$ با آن چیزی که در بخش اول گفته شده بود متفاوت است.

$$\rightarrow (\beta D_S)^2 + (\theta D_S)^2 - 2(\beta D_S)(\theta D_S)\cos\gamma = (\alpha D_{LS})^2$$

$$\rightarrow \beta^2 + \theta^2 - 2\beta\theta = \alpha^2 \frac{D_{LS}^2}{D_S^2}$$

و با جایگذاری $\alpha$ داریم:

$$\alpha^2 \frac{D_{LS}^2}{D_S^2} = \left(\frac{4GM}{bc^2}\right)^2 \frac{D_{LS}^2}{D_S^2} \rightarrow \alpha^2 \frac{D_{LS}^2}{D_S^2} = \left(\frac{4GM}{\theta D_L c^2}\right)^2 \frac{D_{LS}^2}{D_S^2}$$

$$\rightarrow \alpha^2 \frac{D_{LS}^2}{D_S^2} = \left(\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_S D_L}\right)^2 \frac{1}{\theta_E^2} \rightarrow \alpha^2 \frac{D_{LS}^2}{D_S^2} = \frac{\theta_E^4}{\theta^2}$$

$$\rightarrow \beta^2 + \theta^2 - 2\beta\theta\cos\gamma = \frac{\theta_E^4}{\theta^2} \rightarrow \theta_E^4 = \theta^4 + \beta^2\theta^2 - 2\beta\theta^3\cos\gamma$$

**قسمت ب:**

در این قسمت چون صورت سوال از قرمزگرایی کهکشان‌ها صحبت کرده، نباید از انبساط کیهان صرف‌نظر کنیم و اگر اثر انبساط کیهان را در نظر بگیریم باید از فاصله قطر زاویه‌ای به جای فواصل معمولی استفاده کنیم. می‌دانیم تعریف این فاصله به صورت زیر است:

$$d_A = a\chi$$

و طبق تعریف :

$$\int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{1-k\chi^2}} = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}$$

و چون جهان تخت است:

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}$$

برای محاسبه انتگرال فوق، ابتدا از معادله فریدمان استفاده کرده و $a(t)$ را حساب می‌کنیم:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{0,m}a^{-3} + \rho_{0,\Lambda}\right)$$

در زمان برابری ماده و انرژی تاریک داریم:

$$\rho_{0,m}a_{m\Lambda}^{-3} = \rho_{0,\Lambda} \rightarrow a_{m\Lambda} = \left(\frac{\rho_{0,m}}{\rho_{0,\Lambda}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

و با توجه به تعریف پارامتر چگالی:

$$\Omega_{0,i} = \frac{8\pi G\rho_{0,i}}{3H_0^2} \rightarrow a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{0,m}}{\Omega_{0,\Lambda}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \sqrt{H_0^2\left(\Omega_{0,m}a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}\right)} \rightarrow \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = H_0\sqrt{\Omega_{0,m}a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}}$$

$$\rightarrow \int_0^a \frac{1}{a}\frac{da}{\sqrt{\Omega_{0,m}a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}}} = \int_0^t H_0 dt$$

اگر از جمله $\Omega_{0,m}a^{-3}$ در عبارت زیر رادیکال فاکتور بگیریم، داریم:

$$\int_0^a \frac{1}{a}\frac{da}{\sqrt{\Omega_{0,m}a^{-3}}\sqrt{1+\frac{\Omega_{0,\Lambda}}{\Omega_{0,m}}a^3}}=\int_0^t H_0dt \to \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\Omega_{0,m}}}\frac{\sqrt{a}da}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}}\right)^3}}=H_0t$$

برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}}\right)^3=\sinh x^2 \to a^{\frac{3}{2}}=a_{m\Lambda}^{\frac{3}{2}}\sinh x \to \frac{3}{2}\sqrt{a}da=a_{m\Lambda}^{\frac{3}{2}}\cosh x\, dx$$

$$\to \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\Omega_{0,m}}}\frac{\sqrt{a}da}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}}\right)^3}}=\int_0^a \frac{1}{\sqrt{\Omega_{0,m}}}\frac{\frac{2}{3}a_{m\Lambda}^{\frac{3}{2}}\cosh x\, dx}{\sqrt{1+\sinh x^2}}$$

طبق اتحاد زیر داریم:

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1 \to \cosh x=\sqrt{1+\sinh x^2}$$

$$\to \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\Omega_{0,m}}}\frac{\sqrt{a}da}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}}\right)^3}}=\frac{2a_{m\Lambda}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\Omega_{0,m}}}\int_0^a dx$$

$$\to \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\Omega_{0,m}}}\frac{\sqrt{a}da}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}}\right)^3}}=\frac{2a_{m\Lambda}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\Omega_{0,m}}}x=\frac{2a_{m\Lambda}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\Omega_{0,m}}}\sinh^{-1}\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\to H_0t=\frac{2a_{m\Lambda}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\Omega_{0,m}}}\sinh^{-1}\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

اگر از تعریف $a_{m\Lambda}$ استفاده کنیم:

$$H_0t=\frac{2}{3\sqrt{\Omega_{0,\Lambda}}}\sinh^{-1}\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}}\right)^{\frac{3}{2}} \to a(t)=a_{m\Lambda}\left(\sinh\left(\frac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_{0,\Lambda}}t\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

برای محاسبه $\chi$ به نحو زیر عمل می‌کنیم:

$$\chi=\int_t^{t_0}\frac{cdt}{a(t)}=\frac{c}{a_{m\Lambda}}\int_t^{t_0}\frac{cdt}{\left(\sinh\left(\frac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_{0,\Lambda}}t\right)\right)^{\frac{2}{3}}}$$

و با استفاده از تغییر متغیر زیر:

$$\frac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_{0,\Lambda}}t = w \rightarrow dt = \frac{2}{3H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_{0,\Lambda}}}dw$$

$$\rightarrow \chi = \frac{c}{a_{m\Lambda}}\ \frac{2}{3H_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_{0,\Lambda}}}\int_t^{t_0}\frac{dw}{\sinh^{\frac{2}{3}}w}$$

انتگرال فوق، جواب تحلیلی ندارد و تنها می‌توان مقدار آن را به صورت عددی محاسبه کرد.

حال فرض کنید که رابطه فوق را به صورت عددی برای $z_1$ و $z_2$ حل کرده‌ایم. فاصله همراه متناظر با $z_1$ را با $D_L$ و فاصله همراه متناظر با $z_2$ را $D_S$ می‌نامیم. یعنی:

$$\chi(z_1) = D_L\ , \chi(z_2) = D_S$$

فاصله همراه منبع از دید عدسی برابر است با:

$$\chi_3 = \chi(z_2) - \chi(z_1) \rightarrow \chi_3 = D_S - D_L \equiv D_{LS}$$

حال برای محاسبه پارامترهای $x$ و $y$ که در بخش اول معرفی کردیم باید قرمز گرایی منبع از دید عدسی را حساب کنیم. برای این کار اگر ناظر را روی عدسی قرار دهیم، زمان $t_0$ ناظر متناظر با ضریب مقیاس $a_1$ خواهد بود. پس طبق تعریف قرمزگرایی:

$$1 + z = \frac{a(t)}{a(t_0)} \rightarrow 1 + z = \frac{a_2}{a_1} \rightarrow 1 + z = \frac{1 + z_1}{1 + z_2}$$

این کار را به این خاطر انجام دادیم که باید فاصله قطر زاویه‌ای منبع از دید عدسی را حساب کنیم.

$$d_S = \frac{D_S}{1 + z_2}$$

$$d_L = \frac{D_L}{1 + z_1}$$

$$d_{LS} = \frac{D_{LS}}{1 + z} = \frac{D_{LS}}{1 + z_1}(1 + z_2)$$

که $d$ همان فاصله قطر زاویه‌ای است. پس همانند کاری که در بخش اول انجام دادیم:

$$x = \beta d_S \rightarrow x = \beta\frac{D_S}{1 + z_2}$$

$$y = \delta d_{LS} \rightarrow y = \delta\frac{D_{LS}}{1 + z_1}(1 + z_2)$$

$$x+y=\theta d_S \rightarrow x+y=\theta \frac{D_S}{1+z_2}$$

و با جایگذاری $x$ و $y$ و $\delta$ :

$$\beta \frac{D_S}{1+z_2}+\delta \frac{D_{LS}}{1+z_1}(1+z_2)=\theta \frac{D_S}{1+z_2}$$

$$\rightarrow \frac{4GM}{bc^2}\frac{D_{LS}}{1+z_1}(1+z_2)=\frac{D_S}{1+z_2}(\theta-\beta)$$

و می‌دانیم برای $b$ داریم:

$$b=\theta d_L \rightarrow b=\theta \frac{D_L}{1+z_1}$$

$$\rightarrow \frac{4GM}{c^2}\frac{1+z_1}{\theta D_L}\frac{D_{LS}}{1+z_1}(1+z_2)=\frac{D_S}{1+z_2}(\theta-\beta)$$

$$\rightarrow \frac{4GM}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_L D_S}(1+z_2)^2=\theta^2-\theta\beta$$

اگر $\theta_E'$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$${\theta_E'}^2=\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_L D_S}(1+z_2)^2 \rightarrow \theta_E'=\theta_E(1+z_2)$$

خواهیم داشت:

$${\theta_E'}^2=\theta^2-\theta\beta \rightarrow \theta^2-\theta\beta-{\theta_E'}^2=0$$

$$\rightarrow \theta_\pm=\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-{\theta_E'}^2}$$

**قسمت پ:**

با توجه به شکل، بردارهای $\eta$ و $\chi$ به صورت زیر به $\vec{\beta}$ و $\vec{\theta}$ مربوط می‌شوند:

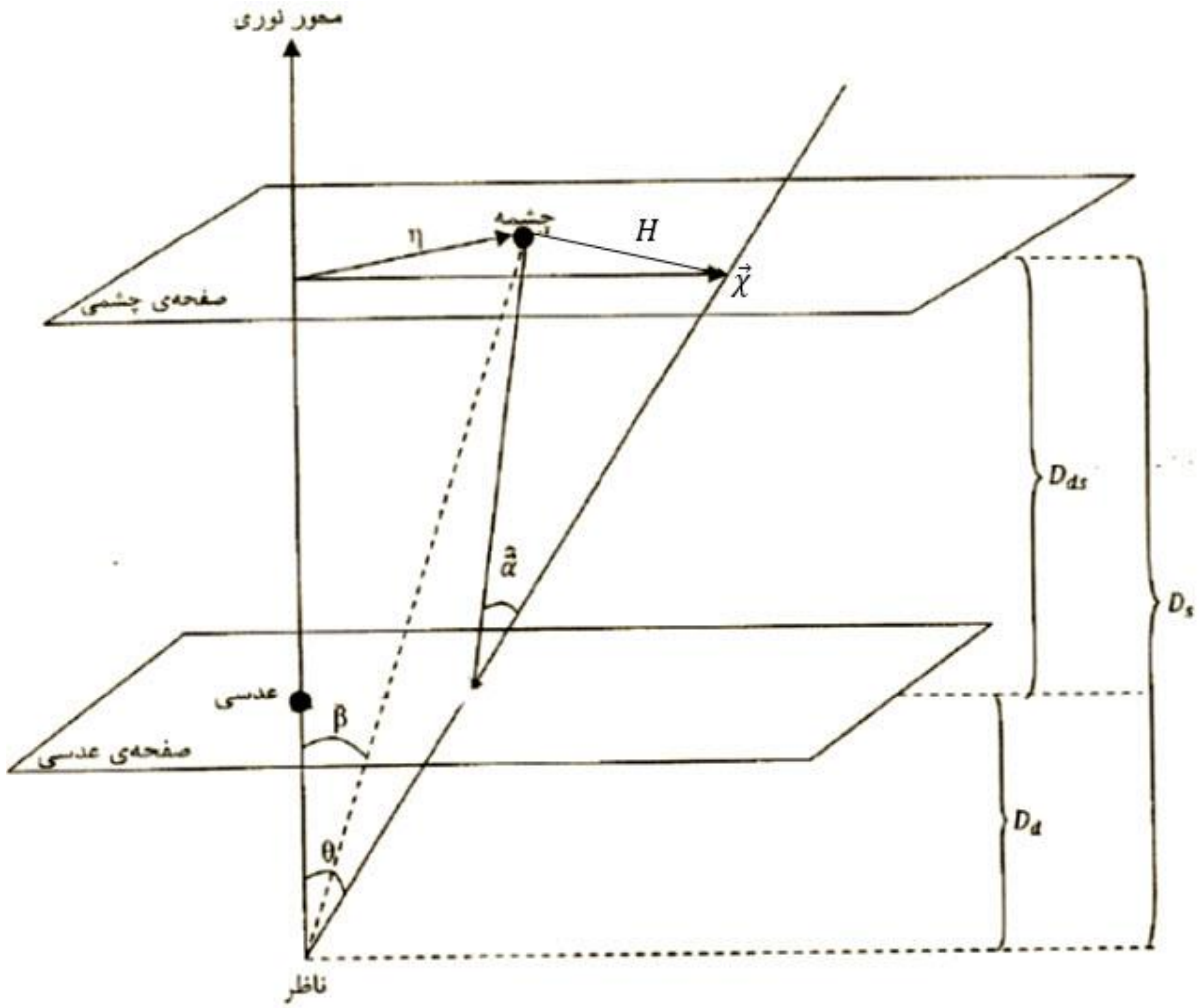
$$\vec{\beta}\equiv\frac{\vec{\eta}}{D_S}$$

$$\vec{\theta}\equiv\frac{\vec{\chi}}{D_S}$$

و با توجه به شکل، بردار $H$ و $\hat{\alpha}$ نیز به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\hat{\alpha} = \frac{\vec{H}}{D_{LS}}$$

و با توجه به شکل:




$$\vec{H} = \vec{\chi} - \vec{\eta}$$

$$\rightarrow (\vec{\theta} - \vec{\beta})D_S = \hat{\alpha} D_{LS} \rightarrow \vec{\theta} - \vec{\beta} = \hat{\alpha}\frac{D_{LS}}{D_S}$$

$$\rightarrow \vec{\theta} - \vec{\beta} = \vec{\alpha}$$

**توضیح مختصری در رابطه با محاسبه $\hat{\alpha}$ برای جسم‌های گسترده:**

در حالتی که عدسی نقطه‌ای باشد، براساس معادلات نسبیت عام زاویه انحراف آن به همان صورتی که در قسمت‌های قبل استفاده کردیم محاسبه خواهد شد. اما برای عدسی‌های گسترده محاسبات مربوط به زاویه $\hat{\alpha}$ کمی پیچیده تر خواهد شد. در واقع هر جسم گسترده را می‌توان تعداد بیشماری از لنزهای نقطه‌ای در نظر گرفت که عدسی را تشکیل می‌دهند.

ابتدا کمیت $\psi$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\psi(b) = \frac{4GM}{c^2}\ln b$$

$\hat{\alpha}$ را برای جسم نقطه‌ای می‌توان به صورت زیر برحسب $\psi(b)$ بیان کرد:

$$\hat{\alpha}(b) = \frac{d\psi(b)}{db} = \frac{4GM}{bc^2}$$

هنگامی که ابعاد عدسی در مقایسه با $D_L$ و $D_{LS}$ کوچک باشد، می‌توان فرض کرد که مسیر حرکت نور، دو خط راست است که یک شکستگی یا انحراف در محل جرم نقطه‌ای در آن رخ داده است. در این صورت می‌توان انحراف کلی پرتو نور را به صورت جمع انحراف‌های ناشی از بیشمار جرم نقطه‌ای در نظر گرفت. به این تقریب، تقریب عدسی باریک $(thin\ lens\ approximation)$ گویند. با استفاده از این تقریب می‌توان نشان داد که $\psi(\vec{b})$ برابر است با:

$$\psi(\vec{b}) = \frac{4G}{c^2}\int \sigma(\vec{b})\ln\left|\vec{b}' - \vec{b}\right| dS'$$

پس زاویه انحراف نور، یک کمیت برداری است که مقدار آن در فاصله $\vec{b}$ از مرکز عدسی برابر است با:

$$\hat{\alpha}(\vec{b}) = \boldsymbol{\nabla}\psi(\vec{b})$$

کمیت $\psi(\vec{b})$ را پتانسیل لنزینگ می‌نامند. رابطه فوق، یک رابطه کلی برای اجسام گسترده است که در حالت کلی با کامپیوتر محاسبه می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، رابطه مربوط به پتانسیل لنزینگ بسیار شبیه به پتانسیل گرانشی است با این تفاوت که در دو بعد محاسبه می‌شود. اما می‌خواهیم نشان دهیم که قضیه‌ای همانند قضیه پوسته برای این نوع پتانسیل نیز برقرار است.

طبق قضیه پوسته برای پتانسیل لنزینگ، اگر لنز مورد نظر ما تقارن سمتی $(axisymmetric)$ داشته باشد، چگالی سطحی، تنها به فاصله تصویر شده از مرکز تصویر، $R$ ، بستگی دارد. میخواهیم نشان دهیم که زاویه انحراف در این حالت برای پرتویی که از فاصله $b$ از مرکز جسم عبور میکند، تنها ناشی از جرم‌هایی است که داخل یک دایره به شعاع $b$ قرار دارند. یعنی همانند قضیه پوسته برای گرانش، جرم‌های بیرونی در انحراف پرتو نقشی ندارند و انحراف پرتو تنها ناشی از جرم‌های درونی است.

اثبات:

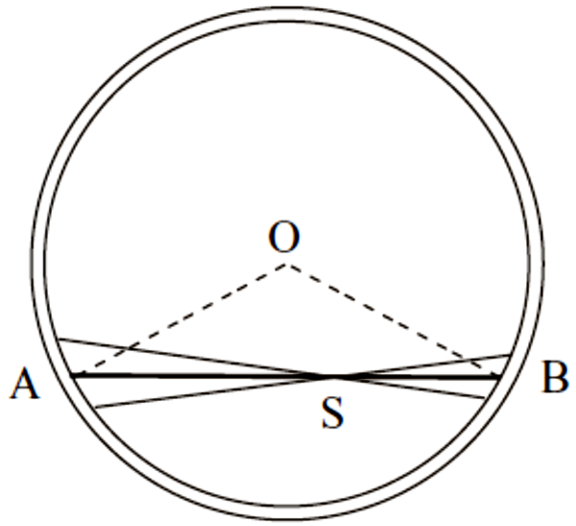
ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر شکل عدسی به صورت یک حلقه دایروی با چگالی یکنواخت باشد، پرتو در نهایت هیچ انحرافی در مسیرش رخ نخواهد داد. برای این اثبات، پرتو نوری را در نظر بگیرید که از نقطه $S$ در شکل زیر می‌گذرد. اگر این حلقه را به المان‌های دیفرانسیلی تقسیم کنیم، برای هر المان همانند شکل زیر یک

المان نیز درست مقابل آن نسبت به نقطه $S$ وجود دارد که پرتو را در دو جهت مخالف منحرف می‌کنند. می‌دانیم که دو زاویه‌ای که در راس $S$ بوجود می‌آیند متقابل به راس و با هم برابرند. با توجه به اینکه چگالی ثابت است:

$$\delta m_A = \lambda r_A \delta\theta_A$$

$$\delta m_B = \lambda r_B \delta\theta_B$$

که $\lambda$ چگالی سطحی حلقه و $r$ فاصله المان از نقطه $S$ است. همچنین می‌دانیم که $\delta\theta_A$ و $\delta\theta_B$ نیز با هم برابر هستند. پس داریم:




$$\frac{\delta m_A}{\delta m_B} = \frac{r_A}{r_B} \rightarrow \frac{dm_A}{dm_B} = \frac{SA}{SB}$$

و برای زاویه انحراف نیز داریم:

$$\alpha_A = \frac{4G\delta m_A}{b_A c^2} \rightarrow \alpha_A = \frac{4G}{c^2}\frac{\delta m_A}{SA}$$

$$\alpha_B = \frac{4G\delta m_B}{b_B c^2} \rightarrow \alpha_B = \frac{4G}{c^2}\frac{\delta m_B}{SB}$$

$$\rightarrow \frac{\alpha_A}{\alpha_B} = \frac{\delta m_A}{\delta m_B}\frac{SB}{SA} \rightarrow \alpha_A = \alpha_B$$

پس برای هر دو المان، نور به اندازه $\alpha_A$ به نقطه $A$ نزدیک شده سپس به همان اندازه از آن دور می‌شود. پس در کل هیچ انحرافی برای پرتو نوری بوجود نمی‌آید. با توجه به این که $\alpha$ در داخل حلقه $0$ است:

$$\alpha = 0 \rightarrow \nabla\psi(\vec{b}) = 0 \rightarrow \psi(\vec{b}) = cte$$

و به راحتی میتوان $\psi$ را برای مرکز حلقه حساب کرد. اگر شعاع حلقه $a$ باشد:

$$\psi(\vec{b}) = \frac{4G}{c^2}\int \sigma(\vec{b}) \ln|\vec{b}' - \vec{b}| dS'$$

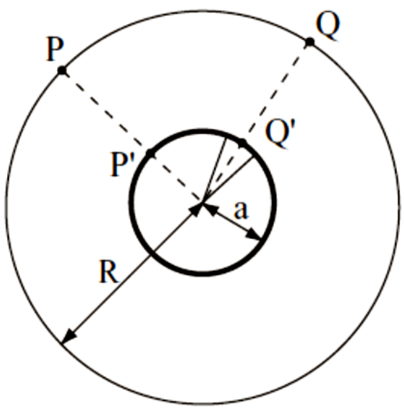
با توجه به اینکه در $\psi$ را در مرکز می‌خواهیم پس $\vec{b} = 0$ است و داریم:

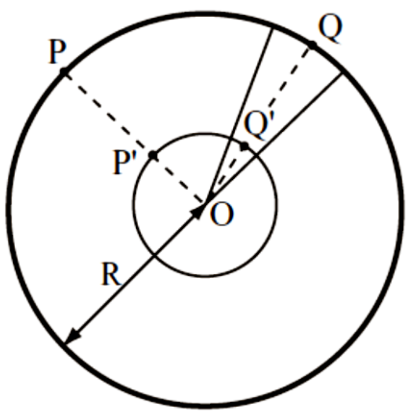
$$\psi(0) = \frac{4G}{c^2} \int \sigma \ln a \, ds \rightarrow \psi(0) = \frac{4GM_{ring}}{c^2} \ln a$$

و چون $\psi$ ثابت است همواره داریم:

$$\psi(R < a) = \frac{4GM}{c^2} \ln a$$

حال ثابت می‌کنیم که برای پرتویی که از بیرون یک حلقه می‌گذرد، زاویه انحراف همانند این است که کل جرم حلقه در مرکز آن متمرکز شده باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که پتانسیل لنزینگ در فاصله $R > a$ از یک حلقه یکنواخت به جرم $M$ ، $\psi(P)$ ، برابر است با $\psi'(P')$ یا پتانسیل لنزینگ در نقطه $P'$ که در داخل یک حلقه به جرم $M$ و شعاع $R$ قرار دارد. به شکل زیر توجه کنید.




در شکل سمت چپ، پتانسیل ناشی از یک المان در نقطه $Q'$ برابر است با:

$$\psi(\vec{b}) = \frac{4G}{c^2}\int \sigma(\vec{b}) \ln|\vec{b}' - \vec{b}| dS' = \int \ln|\vec{b}' - \vec{b}| dm$$

$$\rightarrow \delta\psi(P) = \frac{4G}{c^2} \delta m \ln|\vec{x}(P) - \vec{x}(Q')| \rightarrow \delta\psi(P) = \frac{4G}{c^2}\frac{M\delta\theta}{2\pi} \ln|\vec{x}(P) - \vec{x}(Q')|$$

در شکل سمت راست، سهم پتانسیل ناشی از المان جرمی در نقطه $Q$ در محل $P'$ برابر است با:

$$\delta\psi(p') = \frac{4G}{c^2}\frac{M\delta\theta}{2\pi} \ln|x(P') - x(Q)|$$

و بنابر تساوی دو مثلث $OPQ'$ و $OP'Q$ می‌دانیم:

$$PQ' = P'Q \to \delta\psi(P) = \delta\psi'(P')$$

حال اگر این کار را روی کل حلقه انجام دهیم، داریم:

$$\psi(P) = \psi'(P') \to \psi(P) = \frac{4GM}{c^2}\ln R$$

حال هر جرم با تقارن سمتی را می‌توان به تعداد بیشماری حلقه تقسیم کرد. حلقه‌های بیرونی هیچ انحرافی ایجاد نمی‌کنند و حلقه‌های درونی نیز همانند جرم نقطه‌ای رفتار می‌کنند. پس انحراف نوری که از فاصله $b$ از مرکز جسم می‌گذرد، تنها ناشی از جرمی است که درون دایره‌ای به شعاع $b$ قرار دارد. پس می‌توان به راحتی برای هر مدل دلخواه، میزان زاویه انحراف را حساب کرد.

**قسمت ت:**

متاسفانه در صورت سوال به اشتباه ذکر شده است که $\sigma$ چگالی سطحی کهکشان است اما در عبارت داده شده $\sigma$ معیاری از سرعت مدارهای دایره‌ای در کهکشان است. البته اشتباه فوق در حل سوال تاثیرگذار نیست. مدل داده شده برای تابع چگالی زیر بوده است:

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}$$

حال به عنوان تمرین می‌خواهیم زاویه انحراف داده شده در صورت سوال را اثبات کنیم. ابتدا چگالی سطحی را بر حسب فاصله از مرکز بدست می‌آوریم. می‌دانیم:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r)dz = 2\int_0^{\infty} \rho\left(\sqrt{R^2+z^2}\right)dz \to \mu = 2\int_0^{\infty} \frac{\sigma^2}{2\pi G}\frac{dz}{R^2+z^2}$$

که با تغیر متغیر زیر داریم:

$$z^2 = R^2\tan^2\theta \to z = R\tan\theta \to dz = Rsec^2\theta d\theta$$

$$\to \mu = 2\int_0^{\infty} \frac{\sigma^2}{2\pi G R^2}\frac{Rsec^2\theta d\theta}{1+\tan^2\theta} \to \mu = \frac{\sigma^2}{\pi G R}\int_0^{\infty}\frac{sec^2\theta d\theta}{1+\tan^2\theta}$$

و با محاسبه انتگرال فوق:

$$\mu = \frac{\sigma^2}{\pi G R}\times\frac{\pi}{2} \to \mu = \frac{\sigma^2}{2GR}$$

حال جرم درون یک دایره به شعاع $b$ برابر است با:

$$dm = 2\pi R\mu dR \rightarrow dm = 2\pi R\frac{\sigma^2}{2GR}dR \rightarrow dm = \frac{\pi\sigma^2}{G}dR$$

$$\rightarrow M(R < b) = \frac{\pi\sigma^2}{G}b$$

از آنجا که داریم:

$$\hat{\alpha}(\vec{b}) = \boldsymbol{\nabla}\psi(\vec{b})$$

پس هنگامی که $\psi(\vec{b})$ تنها تابع $b$ باشد، خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\nabla}\psi(\vec{b}) = \frac{\partial\psi}{\partial b}\,\hat{b}$$

پس $\hat{\alpha}(\vec{b})$ برای کهکشان‌هایی که تقارن سمتی دارند، تابعی از $b$ و در جهت $\hat{b}$ خواهد بود.

بنابراین :

$$\hat{\alpha}(b) = \frac{4GM(R < b)}{bc^2}\,\hat{b} \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2}\,\hat{b}$$

حال با توجه به شکل زیر:

$$\vec{\xi} = b\hat{b}\,, \vec{\theta} = \frac{\vec{\xi}}{D_L}$$

از آنجا که $\vec{\xi}$ و $\hat{b}$ در یک جهت قرار دارند و $\vec{\xi}$ و $\vec{\theta}$ نیز هم‌جهت می‌باشند، پس $\vec{\theta}$ و $\hat{b}$ نیز در یک جهت هستند. یعنی می‌توان نوشت:

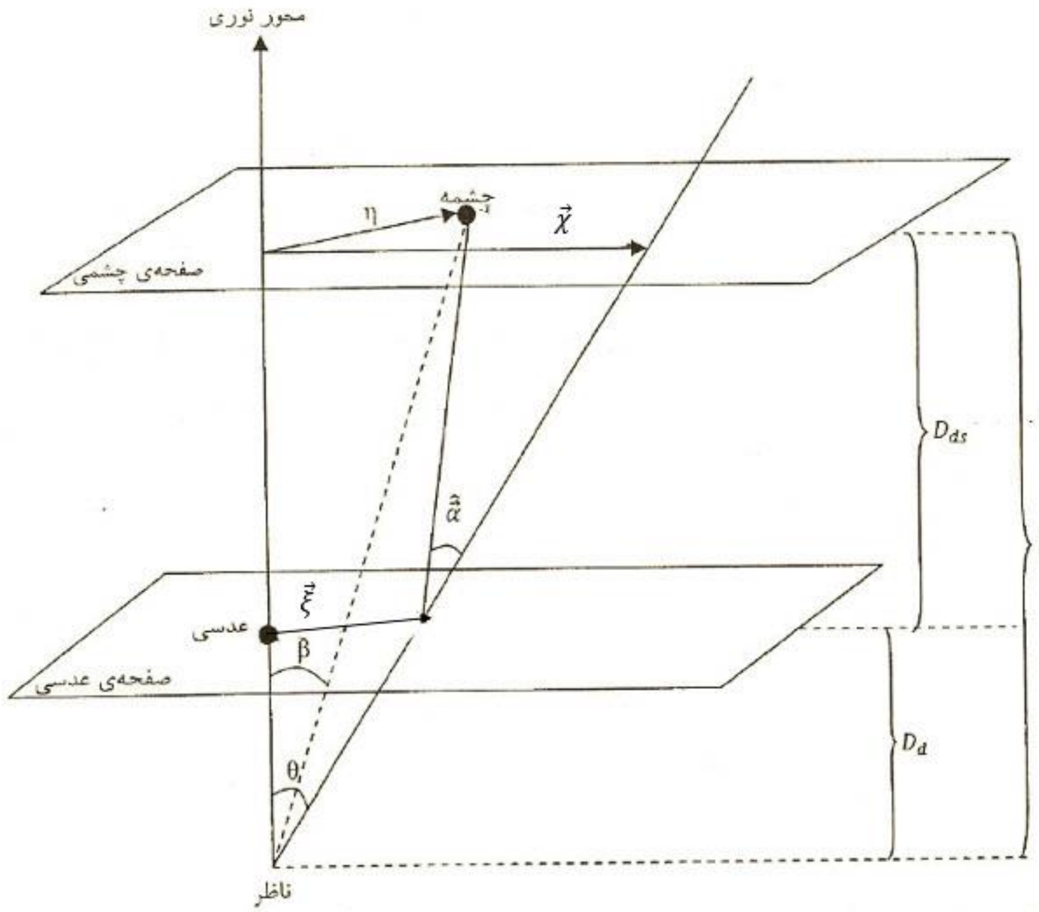
$$\hat{\alpha} = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2}\,\hat{b} \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2}\,\hat{\theta}$$

حال $\hat{\alpha}$ را در معادله عدسی جایگذاری می‌کنیم:

$$\vec{\theta} - \vec{\beta} = \hat{\alpha}\frac{D_{LS}}{D_S} \rightarrow \vec{\theta} - \vec{\beta} = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_S}\frac{\vec{\theta}}{\theta}$$

اگر $\theta_E$ را به صورت زیر تعریف کنیم، داریم:

$$\theta_E = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_S} \rightarrow \vec{\beta} = \vec{\theta}\left(1 - \frac{\theta_E}{\theta}\right)$$




**قسمت ت:**

با توجه به اینکه ابعاد ستاره نوترونی و سیاره کوچک است، پس احتمال این که همگرایی گرانشی رخ دهد هنگامی است که ستاره و سیاره و ناظر روی یک خط باشند. حال فرض کنید پرتوی تابش شده از ستاره نوترونی به سطح سیاره رسیده و بازتاب شده و بازتاب آن پس از منحرف شدن به ما رسیده است. برای آن که تلسکوپ هابل قادر به تفکیک ستاره و سیاره باشد، باید داشته باشیم:

$$\theta = \theta_H$$

که $\theta_H$ توان تفکیک تلسکوپ هابل است. با توجه به طول موج پرتو $x$ داریم:

$$\theta_H = 1.22\frac{\lambda_x}{D} \rightarrow \theta = \theta_H = 5.083 \times 10^{-10}(rad)$$

با توجه به فاصله ستاره نوترونی از ما داریم:

$$OS = 50\ kpc \rightarrow b = \theta \times OS = 7.85 \times 10^{11}\ m$$

پس زاویه انحراف پرتو ورودی برابر است با:

$$\delta = \frac{4GM}{bc^2} \rightarrow \delta = 2.63 \times 10^{-8}$$

و با توجه به شکل:

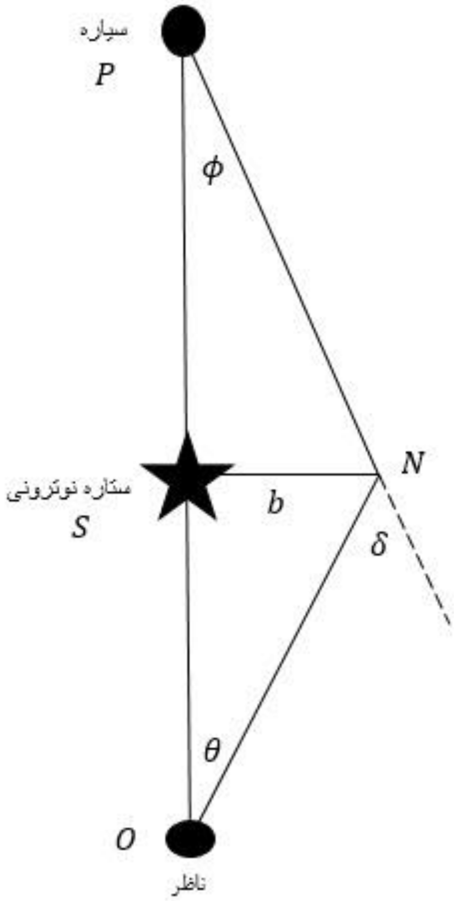
$$\phi + \theta = \delta \rightarrow \phi = \delta - \theta \rightarrow \phi = 2.578 \times 10^{-8}$$

و در مثلث $PNS$ داریم:

$$\phi = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{\phi} \rightarrow a = 3.045 \times 10^{19}\ m \rightarrow a = 0.985\ kpc$$

پس شعاع مداری سیاره برای این کار، باید برابر $0.985\ kpc$ باشد که عملا غیر ممکن است. در واقع می‌توان با محاسبه سرعت فرار به این نتیجه پی برد  که اگر سیاره آنجا باشد احتمالا فرار می‌کند.

$$v_{esc} = 2.95\ \frac{km}{s}$$



**سوال امتیازی :**

ستاره‌های ابرهای ماژلانی، عموما در راستای خط دید ما گسترده شده‌اند و چون این ساختار خارج از کهکشان راه شیری قرار دارد، ستارگان و جرم‌های موجود در هاله کهکشان، می‌توانند نور این ستارگان را خمیده کنند. با توجه به ساختار $LMC$ ستاره‌های آن را می‌توان در فاصله یکسانی از ناظر در نظر گرفت. برای محاسبه این احتمال، مخروطی را در نظر بگیرید که ناظر را به صفحه عدسی وصل می‌کند. اگر سطح مقطع مخروط $A$ باشد، تعداد عدسی‌های موجود در این ناحیه برابر است با:

$$dN = n(D_L)AdD_L$$

که $n$ چگالی عددی مربوط به عدسی‌هاست، حال باید ببینیم برای این که ستاره‌ها در فاصله زاویه‌ای کمتر از $\theta_E$ از عدسی باشند، چه مساحتی از $A$ را باید اشغال کنند. احتمال این که فاصله زاویه‌ای عدسی و چشمه از $\theta_E$ کمتر شود، برابر این است که چشمه درون یک دایره به شعاع $\theta_E$ قرار دارد که مرکز دایره بر روی عدسی است. شعاع این دایره در صفحه‌ای که عدسی‌ها روی آن هستند برابر است با:

$$R_E = D_L\theta_E \to R_E = D_L\sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_{LS}}{D_L D_S}} \to R_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2}\frac{D_L(D_S - D_L)}{D_S}}$$

مساحت دایره‌ای به شعاع $R_E$ روی صفحه عدسی‌ها برابر است با:

$$S_E = \pi R_E^2 \to S_E = \frac{4\pi GM}{c^2}\frac{D_L(D_S - D_L)}{D_S}$$

پس مساحت کل دایره‌های تشکیل شده برای یک المان تعداد از عدسی‌ها برابر است با:

$$dS = S_E dN \to dS = nA\frac{4\pi GM}{c^2}\frac{D_L(D_S - D_L)}{D_S}dD_L$$

و احتمال اینکه این دایره‌ها در مساحت $A$ قابل مشاهده باشند برابر است با:

$$dp = \frac{dS}{A} \to dp = n\frac{4\pi GM}{c^2}\frac{D_L(D_S - D_L)}{D_S}dD_L$$

چون $M$ جرم عدسی و $n$ چگالی عددی عدسی‌هاست، داریم:

$$nM = \rho(D_L)$$

پس این احتمال مستقل از جرم عدسی بوده و به چگالی در هاله بستگی دارد. در نهایت احتمال رخ دادن همگرایی برای کل عدسی‌های موجود در هاله برابر است با:

$$p = \frac{4\pi G}{D_S c^2} \int \rho(D_L) D_L (D_S - D_L) dD_L$$

و برای محاسبه عددی نیز می‌توانید به عنوان مثال برای چگالی ثابت مقدار احتمال فوق را حساب کنید. احتمال رخ دادن پدیده ریز همگرایی از مرتبه $10^{-7}$ است.

موفق باشید

سید مرتضی سادات - بهار 94