بسمه تعالی

پاسخنامه‌ی آزمون مرحله ۲

دوازدهمین المپیاد نجوم و اختر‌فیزیک

نویسندگان:

محمّدهادی ستوده و اعضای تیم جهانی ۲۰۱۶

(وحید احمدی، امیرحسین امیری، پارسا عالیان، ستاره فروزان، روزبه قادری،
محمّدحسین قاسم‌پور، معین محمّدی و ارسلان معتمدی)

سال تحصیلی ۹۵-۱۳۹۴

سؤال ۱

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$Z_{gal} = ۰/۰۱ \quad , \quad M_z = ۱۰ M_\odot$$

تمامی ستارگان کهکشان خورشیدگون هستند، در نتیجه برای محاسبه‌ی جرم کلّ فلزات کافی است از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$$M_{z,tot} = Z_{gal} \times ۱۰^{۱۱} M_\odot = ۱۰^{۹} M_\odot$$

با فرض صفر بودن فلزیت در ابتدای شکل‌گیری کهکشان، در صورتی که تعداد ابرنواخترها را با N، سنّ کهکشان را با t_{gal} و آهنگ انفجار ابرنواختری را با $\dot{N}$ نمایش بدهیم، خواهیم داشت:

$$\dot{N} = \frac{N}{t_{gal}} = \frac{M_{z,tot}/M_z}{t_{gal}}$$

با جایگذاری $t_{gal} = ۱۰\ Gyr$ خواهیم داشت:

$$\dot{N} = ۰/۰۱\ yr^{-۱}$$

که معادل ۱ انفجار ابرنواختری در هر ۱۰۰ سال است.

سؤال ۲

کافی است تخمین بزنیم چه کسری از سطح زمین توسّط شهرها پوشش داده شده است. احتمال برخورد (P) از تقسیم مساحت کلّ شهرها (A) به مساحت کره‌ی زمین ($A_\oplus$) به دست می‌آید.

$$P = \frac{A}{A_\oplus} = \frac{A}{۴\pi R_\oplus^۲} \quad (*)$$

در ادامه راه‌های مختلفی برای انجام تخمین ارائه شده است.

راه اوّل: حدوداً سرانه‌ی مساحت در شهرها (A/N) از مرتبه‌ی ۱۰۰ تا ۲۰۰ متر مربّع است.

جمعیت کلّ دنیا (N) حدود ۷ میلیارد نفر است. در نتیجه مساحت کلّ شهرها چنین به دست می‌آید:

$$A = N \times \left(\frac{A}{N}\right) = (۷ \times ۱۰^۹) \times (۱/۵ \times ۱۰^۲) = ۱۰^{۱۲}\ m^۲$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} P \approx \frac{۱}{۵۰۰} = ۰/۲\ \% \sim ۱۰^{-۳}$$

راه دوّم: $\frac{۳}{۴}$ سطح زمین با آب پوشانده شده است. از میان خشکی‌ها هم حدود ۱٪ شهر هستند.

$$P = ۰/۰۱ \times \frac{۱}{۴} \Rightarrow P \approx ۰/۲۵\ \% \sim ۱۰^{-۳}$$

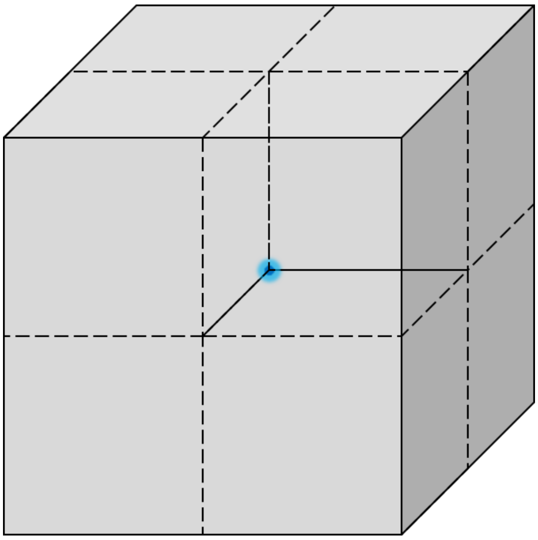
راه سوّم: ۷۰ درصد سطح زمین آب است. در یک سوّم خشکی‌ها شهرسازی شده است.

اگر نسبت طول یک شهر متوسّط به طول کشور ۰/۰۱ باشد، نسبت مساحت آن به مساحت کشور ۰/۰۰۰۱ خواهد بود. فرض می‌کنیم در هر کشور ۱۰۰ شهر متوسّط وجود دارد.

$$P = \left(۱ - \frac{۷۰}{۱۰۰}\right) \times \frac{۱}{۳} \times ۱۰۰ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow P \approx ۰/۱\ \% \sim ۱۰^{-۳}$$

سؤال ۳

مکعّبی به ضلع l و جرم m را در نظر می‌گیریم. مقدار پتانسیل در مرکز آن $\phi_۰$ و در گوشه ϕ است.



با قراردادن ۸ مکعّب کنارهم، مکعّب جدیدی به ضلع $L = ۲l$ و جرم $M = ۸m$ ایجاد می‌شود که مرکز آن بر گوشه‌ی مشترک مکعّب‌های قبلی واقع شده است. این مکعّب پتانسیل مرکزی $\Phi_۰$ را دارد. با توجّه به اسکالر بودن میدان پتانسیل، پتانسیل مجموع در یک نقطه را می‌توان با جمع کردن پتانسیل‌ها به دست آورد.

$$\Phi_۰ = ۸\phi \quad (I)$$

رابطه‌ی پتانسیل در مرکز به فرم زیر است:

$$\phi_۰ = -\alpha \frac{Gm}{l}$$

که در آن G ثابت جهانی گرانش و α یک ثابت وابسته به توزیع چگالی است. با توجّه به یکنواخت بودن توزیع چگالی، $m \propto l^۳$ و در نتیجه:

$$\phi_۰ \propto l^۲ \Rightarrow \Phi_۰ = ۴\phi_۰ \quad (II)$$

با مقایسه‌ی روابط (I) و (II) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\phi}{\phi_۰} = \frac{۱}{۲}$$

سؤال ۴

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$M_c = ۰/۳۴\, M_\odot \quad , \quad R_c = ۰/۲\, R_\odot \quad , \quad \bar{m} = m_H \approx m_p$$

الف) با فرض ثابت بودن چگالی خواهیم داشت:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{۳M_c}{۴\pi R_c^۳} \Rightarrow \rho = ۵/۹۹ \times ۱۰^۴\ \frac{kg}{m^۳}$$

ب) برای به دست آوردن مدّت زمان لازم برای همجوشی، ابتدا آهنگ انجام همجوشی در خورشید را به دست می‌آوریم.

$$\dot{N} = \frac{L_\odot}{\epsilon}$$

که در آن ϵ انرژی آزاد شده در یک واکنش است. طبق پایستگی جرم-انرژی

$$\epsilon = ۰/۰۰۷ \times ۴m_p c^۲$$

m_p جرم پروتون است. در نتیجه

$$\dot{N} = ۹/۱۵ \times ۱۰^{۳۷}\ s^{-۱}$$

با تقسیم کردن آهنگ همجوشی بر تعداد ذرّات همجوشی کننده (تعداد پروتون‌ها)، می‌توان آهنگ رخ دادن همجوشی برای یک پروتون را محاسبه کرد.

$$\dot{N}_p = \frac{۴!\, \dot{N}}{N} = ۵/۴۲ \times ۱۰^{-۱۸}\ s^{-۱}$$

تعداد پروتون‌های موجود در هسته با تقسیم کردن M_c بر $\bar{m}$ به دست می‌آید. ضریب !۴ به این دلیل ضرب شده است که در هر چرخه‌ی پروتون-پروتون[1] چهار پروتون شرکت می‌کنند.[2]

مدّت زمان لازم برای انجام هم‌جوشی یک پروتون برابر با معکوس $\dot{N}_p$ است.

$$\tau_p = \frac{۱}{\dot{N}_p} = ۱/۸۶ \times ۱۰^{۱۷}\ s = ۵/۸۵\ Gyr$$

لازم به ذکر است در واقع پروتون‌ها دوبه‌دو با یک‌دیگر واکنش می‌دهند. محاسبه‌ی دقیق‌تر τ_p با در نظر گرفتن فرایند دقیق چرخه‌ی پروتون-پروتون ممکن می‌شود.

[1] واکنش‌های هم‌جوشی هیدروژن در هسته‌ی خورشید، عمدتاً از طریق چرخه‌ی پروتون-پروتون $(p-p)$ انجام می‌شوند.

[2] در صورت یکسان بودن k ذرّه‌ی هم‌جوشی کننده، آهنگ هم‌جوشی برای یک ذرّه، $k!$ برابر $\dot{N}/N$ است.

ج) مسافت طی شده توسّط هر پروتون برای همجوشی، برابر است با

$$l_p = v\tau_p$$

برای محاسبه‌ی سرعت ذرّات، کافی است به جرم آن‌ها (m_H) و دمای مرکز خورشید (T_{core}) توجّه کنیم. با استفاده از رابطه‌ی انرژی جنبشی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{۲}\bar{m}v^{۲} = \frac{۳}{۲}kT \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۳kT}{\bar{m}}} = ۶/۰۹ \times ۱۰^{۵}\ \frac{m}{s}$$

در نتیجه

$$l = ۶/۷۵ \times ۱۰^{۲۳}\ m = ۲۱/۸\ Mpc$$

توجّه کنید که برای حل کردن سؤال، بایستی آهنگ انجام همجوشی را محاسبه کنیم. با توجّه به این که تمامی برخوردهای انجام شده بین پروتون‌ها در مرکز خورشید منجر به همجوشی نمی‌شود، محاسبه‌ی آهنگ انجام برخوردها به کمک مسافت آزاد میانگین به نتیجه‌ی درست نمی‌انجامد.

سؤال ۵

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$n = ۰/۱\ pc^{-۳} \quad , \quad P = ۱۰^{-۶}$$

الف) **راه اوّل:** تعداد ستارگان دارای حیات تا فاصله‌ی d به کمک رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$N = P \times nV = P \times \frac{۴}{۳}\pi d^{۳} n$$

در این‌جا nV تعداد کلّ ستارگان تا فاصله‌ی d و P احتمال وجود حیات است.

فاصله‌ای که به ازای آن $N = ۱$ می‌شود، پاسخ مسئله است.

$$N = ۱ \Rightarrow d = \left(\frac{۳}{۴\pi Pn}\right)^{۱/۳} \Rightarrow d = ۱/۳۴ \times ۱۰^{۲}\ pc \sim ۱۰^{۲}\ pc$$

راه دوّم: مکعّبی به ضلع d را در نظر می‌گیریم که در آن یک میلیون ستاره باشد.

$$N = P \times nV = P \times nd^{۳}$$

در این‌جا nV تعداد کلّ ستارگان در مکّعب و P احتمال وجود حیات است.

فاصله‌ای که به ازای آن $N = ۱$ می‌شود، پاسخ مسئله است.

$$N = ۱ \Rightarrow d = \left(\frac{۱}{Pn}\right)^{۱/۳} \Rightarrow d = ۲/۱۵ \times ۱۰^{۲}\ pc \sim ۱۰^{۲}\ pc$$

ب) ابتدا قدر سیاره از دید ناظر زمینی (m_l) را به دست آورده و سپس قطر دهانه‌ی متناظر با آن را می‌یابیم.

راه اوّل: با فرض این که سیاره‌ی مورد نظر، دارای مشخّصاتی (شعاع و اندازه‌ی مدار) شبیه به زمین و یک جسم سیاه ایده‌آل باشد. آهنگ تابش انرژی توسّط آن برابر با آهنگ دریافت انرژی از ستاره خواهد بود.

$$L_{out} = L_{in} = F \times A_{eff} = F_{\odot} \times \pi R^{۲}$$

در این‌جا F شار دریافتی در محلّ سیاره، $F_{\odot}$ ثابت خورشیدی و A_{eff} مساحت مؤثّر سیاره است. شار دریافتی سیاره در زمین را به دست آورده و قدر معادل با آن را حساب می‌کنیم.

با توجّه به این که نور سیاره به صورت میانگین روی یک نیم‌کره پخش می‌شود و مقایسه با خورشید:

$$F_l = \frac{L_{out}}{۲\pi d^{۲}} \quad , \quad m_l - m_{\odot} = -۲/۵ \log \frac{F_l}{F_{\odot}}$$

$$\Rightarrow m_l = m_{\odot} - ۲/۵ \log\left(\frac{L_{out}}{۲\pi d^{۲} F_{\odot}}\right) = m_{\odot} - ۲/۵ \log\left(\frac{R^{۲}}{۲d^{۲}}\right) \Rightarrow m_l = ۳۲/۵$$

راه دوّم: وقتی سیاره‌ای را کنار خورشید مشاهده می‌کنیم، بازتاب نور خورشید از آن سیاره را مشاهده می‌نماییم. قدر چنین سیاره‌ای ($m_{\circ}$) حدوداً ۲- است. قدر این سیاره از دید زمین (m) چنین به دست می‌آید:

$$m - m_{\circ} = -۲/۵ \log \frac{F}{F_{\circ}} \quad , \quad F = \frac{L}{۲\pi d^{۲}}$$

$$\Rightarrow m = m_{\circ} + ۵ \log \frac{d}{d_{\circ}} \Rightarrow m = ۳۴/۵$$

برای محاسبه‌ی قطر دهانه‌ی متناظر با m_l، از مشخّصات چشم انسان (m_{eye} و D_{eye}) کمک می‌گیریم.

$$m_l - m_{eye} = -۲/۵ \log \left(\frac{D_{eye}}{D_l} \right)^{۲} \Rightarrow D_l \sim ۱\ km$$

سایر تخمین‌ها نیز به جوابی با همین مرتبه منجر می‌شود.

سؤال ۶

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$T_c = ۱۰^۸\ K$$

الف) می‌دانیم:

$$[P] = ML^{-۱}T^{-۲} \quad , \quad [U] = ML^{۲}T^{-۲} \quad , \quad [G] = M^{-۱}L^{۳}T^{-۲}$$

با توجّه به تابعیت فشار (P) و پتانسیل گرانشی (U) از G، M و R می‌توان گفت:

برای فشار:

$$P = CG^{\alpha}M^{\beta}R^{\gamma} \Rightarrow [P] = [G^{\alpha}]\left[M^{\beta}\right][R^{\gamma}]$$

$$\Rightarrow ML^{-۱}T^{-۲} = M^{\beta-\alpha}L^{۳\alpha+\gamma}T^{-۲\alpha}$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha = ۱ \\ ۳\alpha + \gamma = -۱ \\ -۲\alpha = -۲ \end{cases} \Rightarrow \alpha = ۱\ , \beta = ۲\ , \gamma = -۴$$

$$\Rightarrow P = C\,\frac{GM^{۲}}{R^{۴}}$$

برای پتانسیل گرانشی:

$$U = C'G^{\alpha}M^{\beta}R^{\gamma} \Rightarrow [U] = [G^{\alpha}]\left[M^{\beta}\right][R^{\gamma}]$$

$$\Rightarrow ML^{۲}T^{-۲} = M^{\beta-\alpha}L^{۳\alpha+\gamma}T^{-۲\alpha}$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha = ۱ \\ ۳\alpha + \gamma = ۲ \\ -۲\alpha = -۲ \end{cases} \Rightarrow \alpha = ۱\ , \beta = ۲\ , \gamma = -۱$$

$$\Rightarrow U = C'\,\frac{GM^{۲}}{R}$$

ب) از قسمت الف می‌دانیم:

$$P \propto \frac{M^{۲}}{R^{۴}}$$

با استفاده از قانون گاز کامل:

$$P = \frac{\rho k T}{\bar{m}} \propto \frac{\rho T}{\bar{m}}$$

اگر فشار ستون جرم و فشار گاز کامل را برابر قرار دهیم:

$$\frac{M^۲}{R^۴} \propto \frac{\rho T}{\bar{m}} \Rightarrow T \propto \frac{M^۲}{R^۴ \rho}\bar{m}$$

با توجّه به این که جرم ستاره در این مدّت تقریباً ثابت باقی می‌ماند و جرم متوسّط ذرّات هسته‌ی هلیومی تقریباً ۴ برابر جرم متوسّط ذرّات هسته‌ی هیدروژنی است:

$$\frac{T_۲}{T_۱} = ۴\frac{\rho_۱}{\rho_۲}\left(\frac{R_۱}{R_۲}\right)^۴ \Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱} = \left(۴\frac{\rho_۱}{\rho_۲}\frac{T_۱}{T_۲}\right)^{۱/۴}$$

با دانستن شعاع و دمای فعلی خورشید ($R_۱$ و $T_۱$)، $T_۲ = T_c$ و توجّه به ۲ برابر شدن چگالی مرکزی، خواهیم داشت:

$$R_۲ = ۰/۷۴\ R_\odot$$

صرف نظر کردن از تغییر ترکیبات هسته به پاسخ $R_۲ = ۰/۵۲\ R_\odot$ می‌انجامد.

ج) از قسمت الف می‌دانیم:

$$|U| \propto \frac{GM^۲}{R}$$

با استفاده از قضیه‌ی ویریال، در می‌یابیم که انرژی کل ستاره ضریبی از انرژی پتانسیل گرانشی آن است. پس می‌توان گفت:

$$E \approx -\frac{GM^۲}{R} \quad (I)$$

اندازه‌ی اختلاف انرژی ستاره در این مدّت برابر با میزان انرژی تابش شده توسّط آن است:

$$dE = -Ldt \Rightarrow \Delta E = E_۲ - E_۱ = -\int_۰^t Ldt \quad (*)$$

با توجّه به رابطه‌ی $L = L_\odot + \alpha t$ خواهیم داشت:

$$\int_۰^t Ldt = \int_۰^t (L_\odot + \alpha t)\,dt = L_\odot t + \frac{\alpha t^۲}{۲} \quad (II)$$

با جایگذاری روابط (I) و (II) در رابطه‌ی $(*)$ خواهیم داشت:

$$GM^۲\left(\frac{۱}{R_۲} - \frac{۱}{R_۱}\right) = L_\odot t + \frac{\alpha t^۲}{۲} \quad (+)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{۲}{t^۲}\left[GM^۲\left(\frac{۱}{R_۲} - \frac{۱}{R_۱}\right) - L_\odot t\right] = \frac{۲GM^۲}{t^۲}\left(\frac{۱}{R_۲} - \frac{۱}{R_۱}\right) - \frac{۲L_\odot}{t}$$

با جایگذاری مقادیر جرم، شعاع اوّلیه و نهایی خورشید و $t = ۱۷\ Myr$ خواهیم داشت:

$$\alpha = -۵/۰۹ \times ۱۰^{۱۱}\ \frac{W}{s} = -۰/۰۴۲\ \frac{L_\odot}{Myr}$$

د) با استفاده از قانون استفان-بولتزمن:

$$L = ۴\pi R^۲ \sigma T_e^۴ \Rightarrow T_e = \left(\frac{L}{۴\pi\sigma R^۲}\right)^{۱/۴}$$

اگر از رابطه‌ی $L = L_\odot + \alpha t$ استفاده کنیم:

$$T_e = \left(\frac{L_\odot + \alpha t}{۴\pi\sigma R^۲}\right)^{۱/۴}$$

با استفاده از رابطه‌ی $(+)$، می‌توان تابعیت زمانی شعاع ستاره را هم به دست آورد:

$$\frac{۱}{R} = \frac{۱}{GM^۲}\left(L_\odot t + \frac{\alpha t^۲}{۲}\right) + \frac{۱}{R_۰}$$

$$\Rightarrow T_e = \left(\frac{L_\odot + \alpha t}{۴\pi\sigma}\left[\frac{۱}{GM^۲}\left(L_\odot t + \frac{\alpha t^۲}{۲}\right) + \frac{۱}{R_۰}\right]^۲\right)^{۱/۴}$$

با جایگذاری مقادیر مربوطه، T_e به دست می‌آید.

$$T_e = ۴۹۰۰\ K$$

سؤال ۷

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$t_{new} = ۸^h\ ۰۰^m\ ۱۲^s$$

$$\varphi_t = ۳۵°\ ۴۲'\ N \quad , \quad l_t = ۵۱°\ ۲۴'\ E \quad , \quad h_t = ۱۲۰۰\ m$$

$$\varphi = ۲۴°\ ۳۷'\ ۳۸''\ S \quad , \quad l = ۷۰°\ ۲۴'\ ۱۵''\ W \quad , \quad h = ۲۶۳۵\ m$$

لحظه‌ی تحویل سال زمانی است که میل و بعد خورشید هر دو صفر هستند. با توجّه به مشخّص بودن میل و عرض جغرافیایی، برای تعیین ارتفاع خورشید کافی است زاویه ساعتی آن از دید ناظر دوّم را حساب کنیم. ابتدا با توجّه به مختصات ارائه شده برای شهر تهران و روابط مربوط به زمان:

$$t = HAMS + ۱۲^h \quad (I)$$

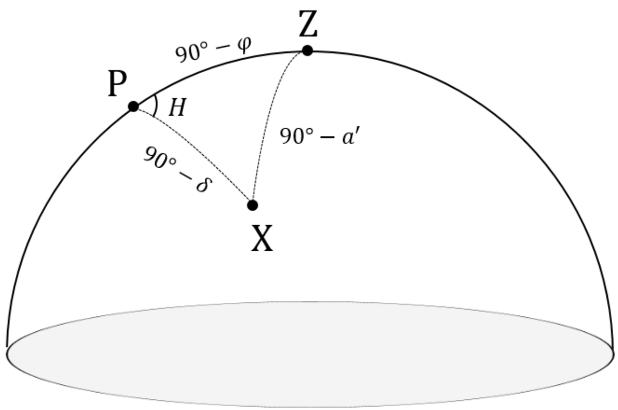
$$ET = HA_\odot - HAMS = RAMS - RA_\odot = ۰ \Rightarrow HA_\odot = HAMS$$

$$\overset{(I)}{\Rightarrow} HA_{\odot,t} = t - ۱۲^h = ۲۰^h\ ۰۰^m\ ۱۲^s$$

t زمان محلّی، $HAMS$ زاویه‌ی ساعتی خورشید میانگین، $HA_\odot$ زاویه‌ی ساعتی خورشید، $RAMS$ بعد خورشید میانگین، $RA_\odot$ بعد خورشید و ET تعدیل زمان است. توجّه کنید که با توجّه به اعمال ساعت تابستانه در ساعت ۲۳:۵۹ روز اوّل فروردین، نیازی به در نظر گرفتن ساعت تابستانه نیست.

حال زاویه ساعتی از دید ناظر را به دست می‌آوریم. مطابق شکل:

$$HA_\odot = HA_{\odot,t} - \Delta l = ۱۱^h\ ۵۲^m\ ۵۹^s$$

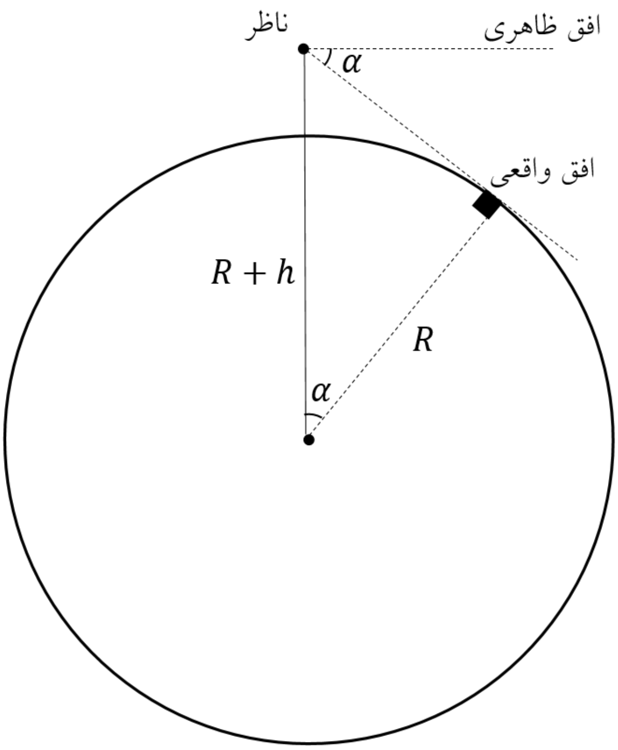


برای حلّ مثلّث کروی مقابل، کافی است از رابطه‌ی کسینوس استفاده کنیم:

$$\sin a' = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta\, cos\varphi \cos H$$

$$\Rightarrow a' = -۶۵/۳۱° = -۶۵°\ ۱۹'$$

به دلیل افت افق ناشی از ارتفاع ناظر، ارتفاع واقعی خورشید کمی بیشتر است. برای محاسبه‌ی میزان افت افق چنین عمل می‌کنیم:



$$\cos\beta = \frac{R}{R+h} \Rightarrow \beta = ۱/۶۵^\circ$$

مقدار نهایی ارتفاع برابر است با:

$$a = a' + \beta \Rightarrow a = -۶۳^\circ\ ۴۰'$$

سؤال ۸

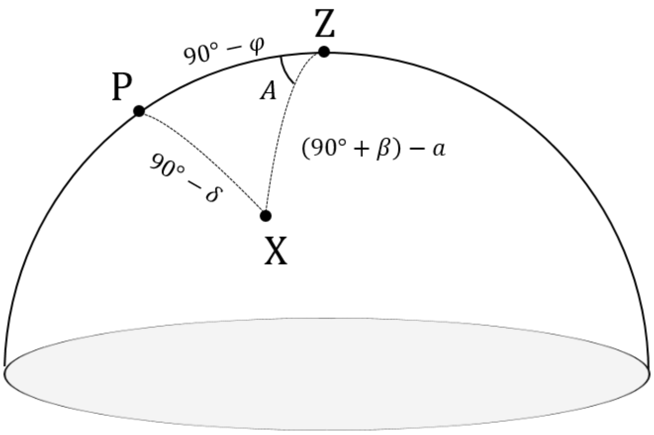
داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$\varphi_۱ = ۱۹^\circ\, ۴۵'\, ۳۵''\, N \quad , \quad l_۱ = ۱۵۵^\circ\, ۲۸'\, ۳۰''\, W \quad , \quad h_۱ = ۴۱۴۵\, m$$
$$\varphi_۲ = ۲۴^\circ\, ۳۷'\, ۳۸''\, S \quad , \quad l_۲ = ۷۰^\circ\, ۲۴'\, ۱۵''\, W \quad , \quad h_۲ = ۲۶۳۵\, m$$

الف) در این مسئله هر دو ناظر دارای افت افق هستند. در این شرایط مجموع ارتفاع و فاصله‌ی سرسویی اجرام برابر با $۹۰^\circ + \beta$ خواهد بود که β میزان افت افق است و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\cos\beta = \frac{R}{R+h} \Rightarrow \beta_۱ = ۲/۰۶^\circ \quad , \quad \beta_۲ = ۱/۶۵^\circ$$

برای به دست آوردن میل ستاره‌ی مورد نظر، کافی است در مثلّث مقابل از رابطه‌ی کسینوس استفاده کنیم.



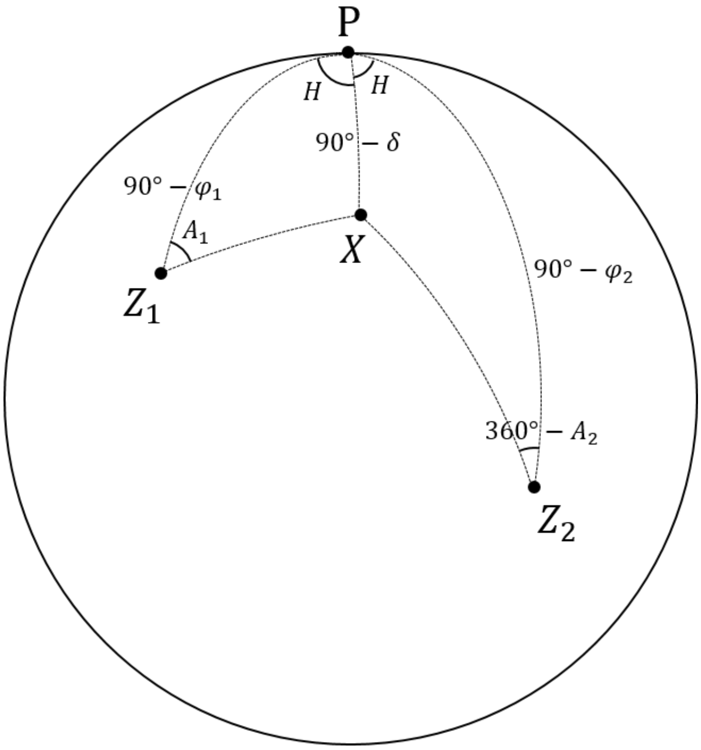
$$\sin\delta = \sin(a-\beta_۱)\sin\varphi_۱ + \cos(a-\beta_۱)\cos\varphi_۱\cos(۳۶۰^\circ - A)$$
$$\Rightarrow \delta = ۴۵/۸۵^\circ$$

مقدار میل بدون در نظر گرفتن افت افق، $\delta = ۴۵/۲۰^\circ$ به دست می‌آید.

ب) انتقال از رصدخانه‌ی ۱ به ۲ ممکن نیست. هنگام انتقال از رصدخانه‌ی ۲ به ۱، اندازه‌ی زاویه‌ی ساعتی ستاره از دید دو رصدخانه برابر است با:

$$H = \frac{l}{۲} = ۴۲/۵۴^\circ$$

با استفاده از روابط کروی در مثلّث‌های ذکر شده، می‌توان مقادیر سمت و ارتفاع را محاسبه کرد.



:$\boldsymbol{PZ_{۱}X}$

کسینوس: $\sin(a_{۱}-\beta_{۱}) = \sin\delta\sin\varphi_{۱} + \cos\delta\cos\varphi_{۱}\cos H$

$$\Rightarrow a_{۱} = \beta_{۱} + \sin^{-۱}(\sin\delta\sin\varphi_{۱} + \cos\delta\cos\varphi_{۱}\cos H)$$

چهارجزیی: $\sin\varphi_{۱}\cos H = \cos\varphi_{۱}\tan\delta - \sin H\cot A_{۱}$

$$\Rightarrow A_{۱} = \tan^{-۱}\left(\frac{\sin H}{\cos\varphi_{۱}\tan\delta - \sin\varphi_{۱}\cos H}\right)$$

:$\boldsymbol{PZ_{۲}X}$

کسینوس: $\sin(a_{۲}-\beta_{۲}) = \sin\delta\sin\varphi_{۲} + \cos\delta\cos\varphi_{۲}\cos H$

$$\Rightarrow a_{۲} = \beta_{۲} + \sin^{-۱}(\sin\delta\sin\varphi_{۲} + \cos\delta\cos\varphi_{۲}\cos H)$$

چهارجزیی: $\sin\varphi_{۲}\cos H = \cos\varphi_{۲}\tan\delta + \sin H\cot A_{۲}$

$$\Rightarrow A_{۲} = \tan^{-۱}\left(\frac{\sin H}{\sin\varphi_{۲}\cos H - \cos\varphi_{۲}\tan\delta}\right)$$

ج) جدول کامل شده به صورت زیر است (ردیف دوّم، مقادیر محاسبه شده بدون افت افق هستند.):

$\boldsymbol{A_{۱}}$	$\boldsymbol{a_{۱}}$	$\boldsymbol{A_{۲}}$	$\boldsymbol{a_{۲}}$
۴۳/۱۹°	۴۸/۵۸°	۳۳۱/۴۷°	۱۱/۳۰°
۴۴/۰۶°	۴۶/۷۶°	۳۳۱/۰۶°	۱۰/۱۵°

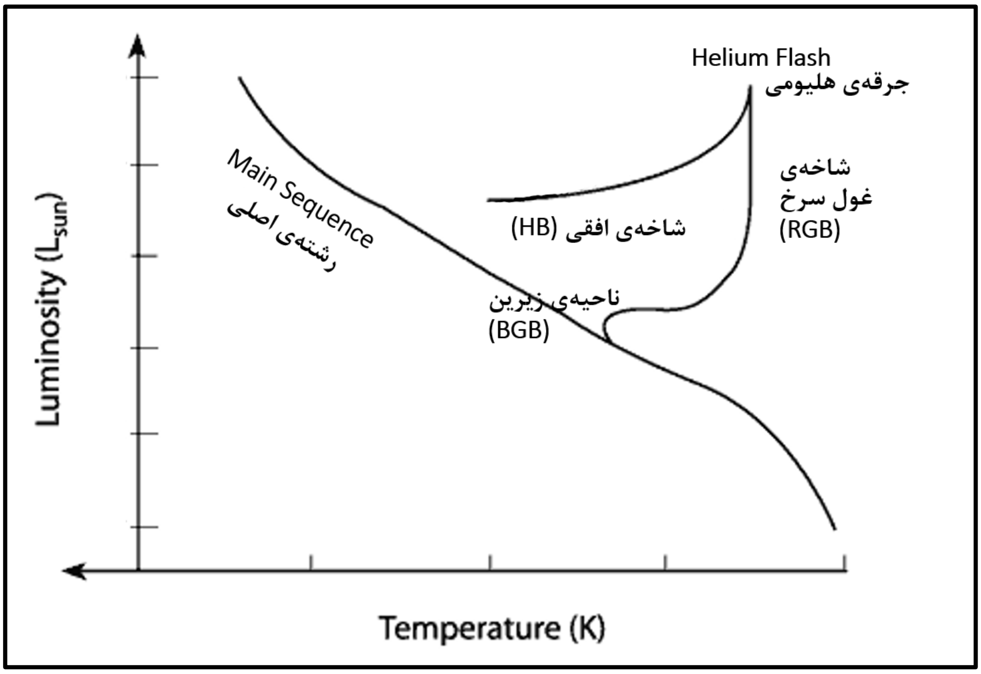
سؤال ۹

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$M = M_\odot \quad , \quad M_{c,\circ} = ۰/۲\, M_\odot \quad , \quad L_\circ = ۱۰ L_\odot$$

$$Y = ۰/۳ \quad , \quad Z = ۰/۰۰۱ \quad , \quad T_{flash} = ۱۰^{۸}\, K$$

الف) تحوّل ستاره در نمودار $H - R$ به شکل زیر است.



ب) ابتدا مقدار k را در رابطه‌ی $L = kM_c^{۸}$ به دست می‌آوریم:

$$k = \frac{L_\circ}{M_{c,\circ}^{۸}} = ۳/۹۱ \times ۱۰^{۶} \frac{L_\odot}{M_\odot^{۸}}$$

سپس، با استفاده از رابطه‌ی ارائه شده، جرم نهایی هسته را به دست می‌آوریم:

$$M_c = ۰/۴۷۶ - ۰/۲۲۱(Y - ۰/۳) - ۰/۰۰۹(۳ + \log Z) - ۰/۰۲۳(M - ۰/۸)$$

$$\Rightarrow M_c = ۰/۴۷۱\, M_\odot$$

در مدّت زمان dt، جرمی برابر با dM_c در همجوشی مشارکت می‌کند.

$$dE = Ldt = ۰/۰۰۷ \times dM_c \times c^{۲} \quad , \quad L = kM_c^{۸}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{۰/۰۰۷c^{۲}}{k}\frac{dM_c}{M_c^{۸}} \Rightarrow \int_{۰}^{t_{RGB}} dt = \frac{۰/۰۰۷c^{۲}}{k}\int_{M_{c,\circ}}^{M_c}\frac{dM_c}{M_c^{۸}}$$

$$\Rightarrow t_{RGB} = \frac{۰/۰۰۷c^{۲}}{k}\left[\frac{M_c^{-۷}}{-۷}\right]_{M_{c,\circ}}^{M_c} = \frac{c^{۲}}{۱۰۰۰k}\left(\frac{۱}{M_{c,\circ}^{۷}} - \frac{۱}{M_c^{۷}}\right) \Rightarrow t_{RGB} = ۲۹۰\ Myr$$

ج) با فرض ثابت ماندن Y و Z در این مدّت و استفاده از رابطه‌ی داده شده، مدّت زمان حضور در شاخه‌ی افقی را محاسبه می‌کنیم:

$$\log t_{HB} = ۱/۷۹۵ + ۰/۵۰۶(Y - ۰/۳) + ۰/۰۲۲(\log Z + ۳) + ۰/۰۷۷(M - ۰/۸)$$
$$\Rightarrow t_{HB} = ۶۰\ Myr$$

با توجّه به مدّت زمان بیشتر حضور ستارگان در شاخه‌ی غول سرخ، انتظار می‌رود فراوانی این نوع ستارگان بیشتر باشد.

سؤال ۱۰

الف) طبق صورت سؤال، مقدار چگالی در زمان حال از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید (کیهان تخت):

$$\rho_\circ = \frac{۳H_\circ^۲}{۸\pi G} \Rightarrow \rho_\circ = ۱/۰۰ \times ۱۰^{-۲۶}$$

در رابطه‌ی بالا $H_\circ$ ثابت هابل است. با استفاده از پایستگی جرم در کیهان مادّه غالب (شامل هیدروژن):

$$\rho a^۳ = \rho_\circ a_\circ^۳$$

با استفاده از رابطه‌ی قرمزگرایی و ضریب مقیاس ($۱ + z = a_\circ/a$):

$$\rho(z) = \rho_\circ(۱ + z)^۳ \quad , \quad \rho = n\bar{m}$$

$$\Rightarrow n = n_\circ(۱ + z)^۳ = \frac{\rho_\circ}{m_H}(۱ + z)^۳$$

m_H جرم هیدروژن است. به ازای $z = ۶$ خواهیم داشت:

$$n = ۲/۰۵ \times ۱۰^۳ \ m^{-۳}$$

ب) آهنگ تابش فوتون توسّط هر کوازار برابر با $\dot{N}_Q = ۱۰^{۵۶} \ s^{-۱}$ است. در صورتی که چگالی تعداد کوازارها n_Q باشد. آهنگ ساطع شدن فوتون‌ها در واحد حجم برابر است با:

$$\dot{n}_\gamma = \dot{N}_Q n_Q$$

آهنگ بازترکیب یک الکترون با مجموعه‌ای از پروتون‌ها با چگالی عددی n_p، برابر با αn_p است. در صورتی که چگالی عددی الکترون‌های آزاد n_e باشد، آهنگ بازترکیب الکترون‌ها در واحد حجم برابر است با:

$$\dot{n}_e = \alpha n_p n_e = \alpha n_p^۲$$

که تساوی آخر به خاطر یونیزه بودن عالم (برابری تعداد الکترون‌های آزاد و پروتون‌ها) برقرار است.

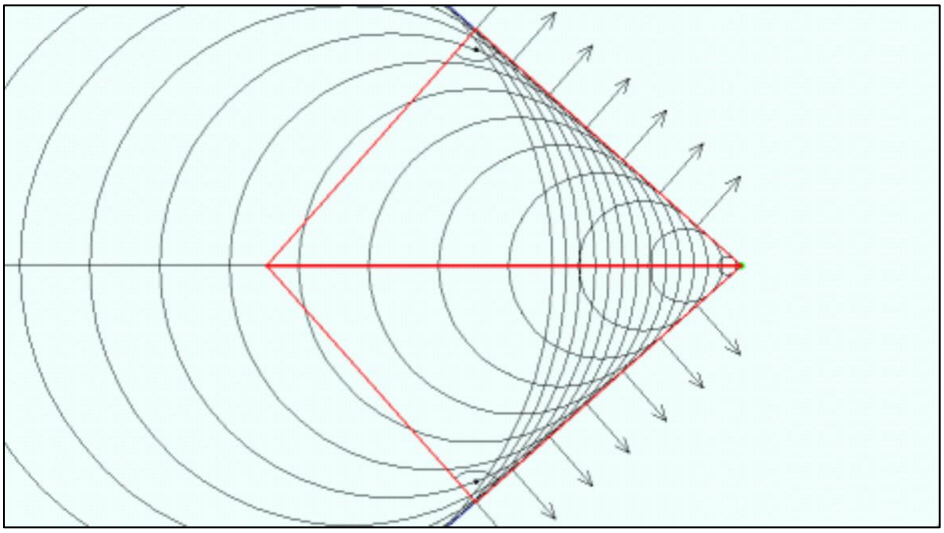
با فرض این که هر فوتون در نهایت یک اتم را یونیزه کند، برای یونیزه بودن کیهان لازم است آهنگ تولید فوتون (یونش اتم‌ها) از آهنگ بازترکیب بیشتر برابر باشد.

$$\dot{n}_\gamma \geq \dot{n}_e \Rightarrow \dot{N}_Q n_Q \geq \alpha n_p^۲ \Rightarrow n_Q \geq \frac{\alpha n_p^۲}{\dot{N}_Q}$$

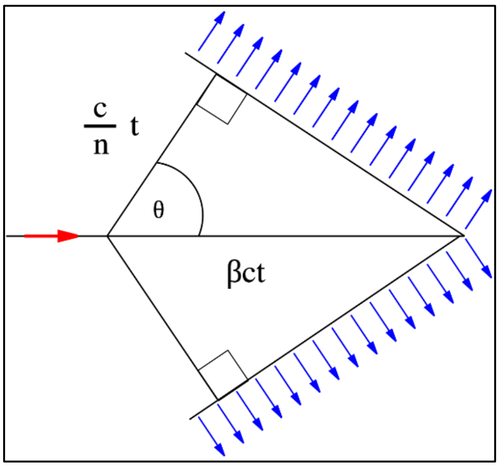
$$\Rightarrow n_Q \geq ۱/۲۶ \times ۱۰^{-۶۸} \ m^{-۳} = ۳/۷۲ \times ۱۰^{-۱۰} \ kpc^{-۳}$$

سؤال ۱۱

شکل زیر نحوه‌ی شکل‌گیری مخروط چرنکف را نمایش می‌دهد:



ذرّه از سمت چپ شروع به حرکت کرده و بیشتر بودن سرعت آن از سرعت پیشروی جبهه‌های موج، موجب شکل‌گیری مخروطی با زاویه‌ی نیم‌رأس θ می‌شود. اگر مبدأ زمانی حرکت ذرّه را $t = ۰$ در نظر بگیریم، مسافت پیموده شده توسّط آن $x_p = vt$ و مسافت پیموده شده توسّط اوّلین جبهه‌ی نور $x_\gamma = \frac{c}{n}t$ است.



با توجّه به شکل، زاویه‌ی چرنکف ($Cherenkov\ Angle$) چنین محاسبه می‌شود:

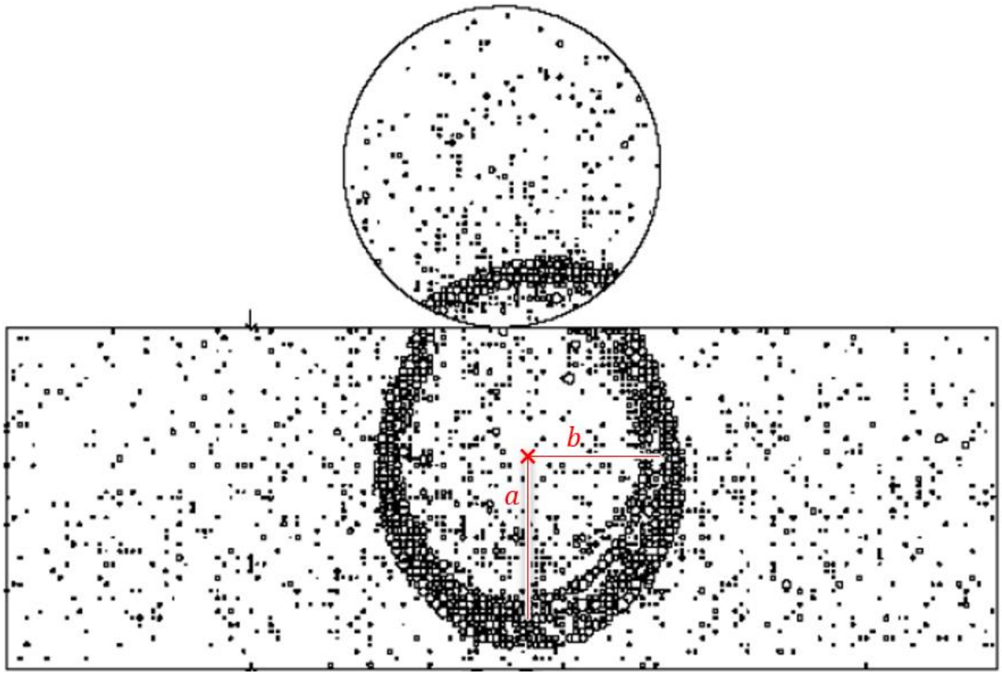
$$\cos\theta = \frac{x_\gamma}{x_p} = \frac{c}{nv}$$

جایگذاری $n_۱ = ۱/۰۰۰۲۹$ برای هوا و $n_۲ = ۱/۳۳۳$ برای آب نتیجه می‌دهد:

$$\theta_۱ = ۱/۴^\circ \quad , \quad \theta_۲ = ۴۱/۴^\circ$$

ب) با رسیدن مخروط تابش (دارای زاویه‌ی نیم‌رأس $۹۰^\circ - \theta$) به دیواره‌های آشکارساز و روشن شدن لامپ‌ها، حلقه‌ی چرنکف ($Cherenkov\ Ring$) شکل می‌گیرد. توجّه کنید که قطر این حلقه به $۹۰^\circ - \theta$ مربوط می‌شود.

حاصل تقاطع مخروط چرنکف با دیواره‌ی مخزن، چیزی شبیه به یک بیضی است. در ادامه با صرف نظر از انحنای مخزن، فرض می‌کنیم این شکل بیضی باشد.

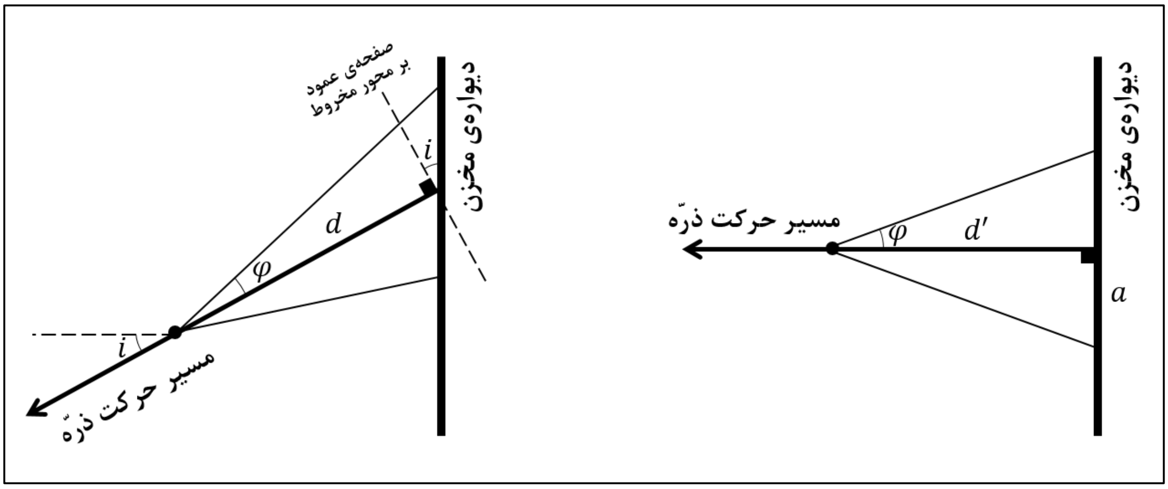


با استفاده از مقیاس‌های ارائه شده:

$$a = ۱۶/۰ \, m \quad , \quad b = ۱۳/۵ \, m$$

در صورتی که مسیر حرکت ذرّه عمود بر دیواره‌ی مخزن بود، دایره‌ای از لامپ‌ها به شعاع a روشن می‌شد. حال که شکل حلقه بیضی است، می‌توان زاویه‌ی انحراف مسیر ذرّه از مسیر عمود (i) را چنین محاسبه کرد:

$$\cos i = \frac{b}{a}$$



با توجّه به شکل بالا ($\varphi = ۹۰^\circ - \theta$):

$$d' = a \cot\varphi \quad , \quad d = d' \sec i$$

$$\Rightarrow d = \frac{a}{\tan\varphi \cos i} = \frac{a^۲ \tan\theta}{b} \Rightarrow d = ۱۶/۷ \, m$$

سؤال ۱۲

داده‌های سؤال عبارت اند از:

$$e = ۰ \quad , \quad r, m_J$$

الف) سرعت مشتری به دلیل اختلال، f برابر می‌شود. در نتیجه انرژی مکانیکی آن برابر است با:

$$E' = K' + U' = \frac{۱}{۲} m_J (fv)^۲ - \frac{GM_\odot m_J}{r} \quad , \quad v^۲ = \frac{GM_\odot}{r}$$

$$\Rightarrow -\frac{GM_\odot m_J}{۲a'} = \frac{f^۲}{۲}\frac{GM_\odot m_J}{r} - \frac{GM_\odot m_J}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{a'} = \frac{۱}{r}(۲ - f^۲) \Rightarrow a' = \frac{r}{۲ - f^۲} \quad (I)$$

با استفاده از روابط مقطع مخروطی خواهیم داشت:

$$a'\left(۱ - e'^۲\right) = \frac{h^۲}{\mu} \quad (*)$$

در این رابطه h تکانه‌ی زاویه‌ای واحد جرم و μ پارامتر گرانشی است. با توجّه به عمود بودن بردار مکان و سرعت در مدار دایروی، مقدار h چنین به دست می‌آید:

$$h = |\vec{r} \times (f\vec{v})| = rfv \quad (II)$$

با توجّه به قرارگیری خورشید بر مرکز جرم، $\mu = GM_\odot$ است. با جایگذاری معادلات (I) و (II) در معادله‌ی $(*)$ خواهیم داشت:

$$\frac{GM_\odot r}{۲ - f^۲}\left(۱ - e'^۲\right) = r^۲ f^۲ \ \frac{GM_\odot}{r} \Rightarrow e' = \sqrt{۱ - ۲f^۲ + f^4} = ۱ - f^۲$$

ب) در حدّ $f \to ۰$ خواهیم داشت:

$$\lim_{f \to ۰} a' = \frac{r}{۲} \quad , \quad \lim_{f \to ۰} e' = ۱$$

مدار به شکل یک خط خواهد بود.

ج) مداری که در آن اثرات کشندی وجود ندارد، یک مدار دایروی است. پس $e" = ۰$. با توجّه به این که هنگام اعمال اثرات کشندی، تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته باقی می‌ماند، با فرض ثابت ماندن سرعت زاویه‌ای چرخشی مشتری در این مدّت خواهیم داشت:

$$h' = h" \Rightarrow GM_\odot a'\left(۱ - e'^۲\right) = GM_\odot a"$$

$$\Rightarrow a" = a'(۱ - e'^۲)$$

د) ابتدا رابطه‌ی $r"$ با r'_p را به دست می‌آوریم

$$a" = a'(۱ - e')(۱ + e') \quad , \quad r'_p = a'(۱ - e')$$
$$\Rightarrow a" = (۱ + e')r'_p$$

در حدّ $e' \to ۱$ خواهیم داشت:

$$\lim_{e' \to ۱} r" = ۲r'_p$$

توجّه شود که $e' \to ۱$ الزاماً معادل با $f \to ۰$ نیست!

هـ) انرژی تلف شده توسّط اثرات کشندی، برابر با اختلاف انرژی مکانیکیِ مدار نهایی و مدار اوّلیه است.

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{GM_\odot m_J}{۲}\left(\frac{۱}{r_f} - \frac{۱}{r_i}\right)$$

مقدار $r_f = ۰/۰۵\ AU$ و $r_i = ۵\ AU$ است. با فرض یکنواخت بودن توزیع چگالی، اندازه‌ی انرژی خودگرانشی مشتری برابر است با:

$$|U_J| = \frac{۳}{۵}\frac{Gm_J^۲}{R_J}$$

در نتیجه:

$$\frac{\Delta E}{|U_J|} = \frac{۵}{۶}\frac{M_\odot}{m_J}\frac{R_J(r_i - r_f)}{r_i r_f} \approx ۸/۵$$

مشتری به واسطه‌ی قفل مداری انرژی‌ای آزاد می‌کند که از انرژی پتانسیل گرانشی‌اش بیشتر است. چگونگی آزاد شدن این انرژی، معمّایی برای دانشمندان است.