«به نام یکتای در کمال»

نهمین تیم

جمهوری اسلامی ایران در

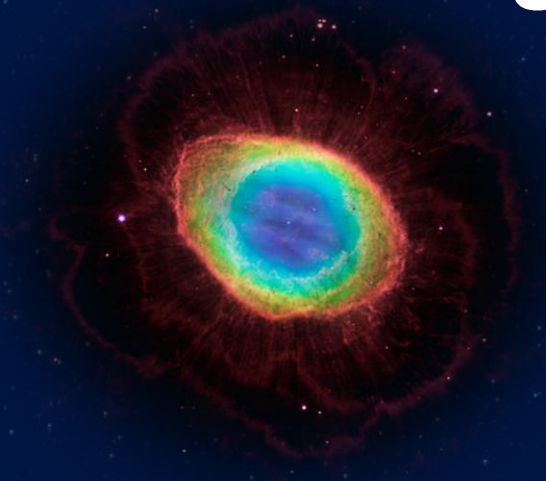
المپیاد جهانی نجوم و اخترفیزیک

www.9thioaa.ir

مجموعه‌ی سؤالات دوره‌ی تابستانه‌ی ۹۳

مکانیک سماوی

تهیه و تدوین: حمیدرضا اکبری



مجموعه سؤالات دوره‌ی تابستانه‌ی ۹۳

مکانیک سماوی

تهیه و تدوین: حمیدرضا اکبری

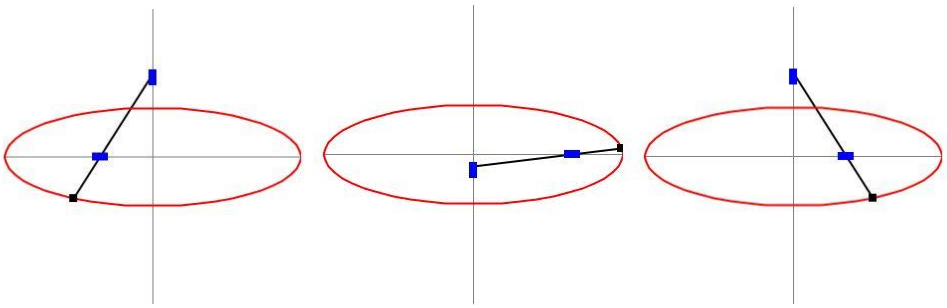
بخش اوّل

مقاطع مخروطی

بیضی

۱- نشان دهید که مجموعه نقاطی که نسبت فاصله شان از یک نقطه (کانون) به فاصله شان از یک خط (خط هادی) یک عدد مثبت (α) کوچکتر از ۱ باشد بیضی است. نشان دهید خروج از مرکز بیضی با α برابر است .

۲- نشان دهید که اگر یک میله روی دو محور عمود بر هم به نحوی جابجا شود که دو نقطه مشخص میله همواره روی دو محور قرار داشته باشند، مسیری که یک نقطه سوم روی میله در فضا طی می کند یک بیضی می سازد (شکل زیر)



۳- محیط بیضی با رابطه ای به صورت زیر بدست می آید:

$$C = 2\pi a\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \cdots\right)$$

اگر به جای رابطه فوق از رابطه $C = a\left(2\pi - \frac{\pi}{2}e^2\right)$ استفاده کنیم برای بیضی های با خروج از مرکز کمتر از ۰٫۵ در بدترین حالت چند درصد خطا در بدست آوردن محیط خواهیم داشت؟

۴- نشان دهید میزان انحنا در یک نقطه(x,y) از یک بیضی که با رابطه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ مشخص می شود از رابطه زیر بدست می آید:

$$\kappa = \frac{1}{a^2 b^2}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

راهنمایی: برای یک خم که معادله آن به صورت $y = f(x)$ است انحنا به صورت زیر محاسبه می شود:

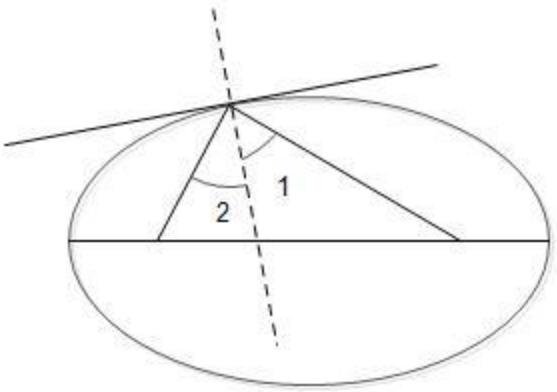
$$\kappa = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

که علامت ' به معنی مشتق نسبت به x می باشد.

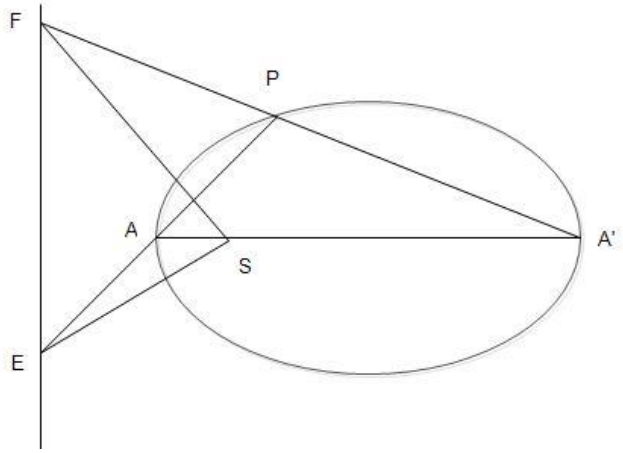
۵- نشان دهید که معادله قطبی یک بیضی با مبدا مرکز بیضی از رابطه زیر بدست می آید:

$$r(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{(b\cos(\theta))^2 + (a\sin(\theta))^2}}$$

۶- نشان دهید که اگر یک آینه به شکل بیضی داشته باشید و از یک کانون آن پرتویی تابش شود و به آینه برخورد کند و بازتاب شود پرتو بازتاب از کانون دیگر بیضی می گذرد. (این معادل این است که اثبات کنید هنگامی که از یک نقطه به دو کانون بیضی وصل می کنیم نیمساز زاویه ایجاد شده عمود بر مماس بر بیضی در آن نقطه است.یعنی در شکل زیر زاویه های ۱ و ۲ برابرند)

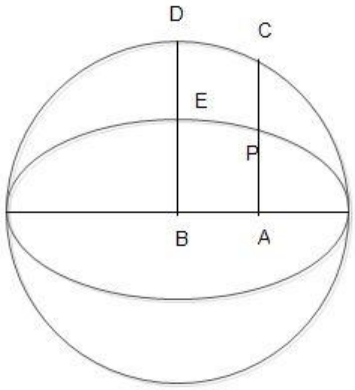


۷- اثبات کنید اگر از یک نقطه روی بیضی به دو سر قطر بزرگ بیضی وصل کنیم و ادامه دهیم تا خط هادی را در نقاط E و F قطع کند و S کانون بیضی مربوط به همان خط هادی باشد زاویه ESF قائمه است.



۸- اگر دایره کمکی یک بیضی را رسم کنیم و عمود بر قطر اصلی را از نقطه دلخواه P رسم کنیم اثبات کنید:

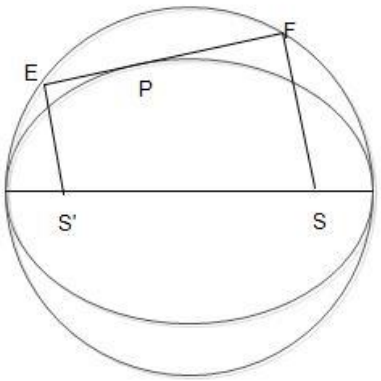
$$\frac{PA}{CA} = \frac{EB}{DB} = \frac{b}{a}$$



با توجه به این سوال:

- توضیح دهید که چرا وقتی یک جسم دایروی مثل یک سکه را اگر کمی بچرخانیم یک بیضی دیده می شود.
- توضیح دهید که چرا یک طرف هلال ماه یک نیم بیضی است.
- اثبات کنید که مساحت بیضی برابر است با πab

۹- اثبات کنید که هرگاه بر خط مماس بر بیضی (از هر نقطه دلخواه P) خطی عمود کنیم که از کانون بگذرد پای عمود روی دایره کمکی قرار دارد.



۱۰- اثبات کنید اگر یک استوانه را با صفحه ای قطع کنیم فصل مشترک یک بیضی خواهد بود. رابطه خروج از مرکز بیضی با زاویه صفحه با محور استوانه (α) چیست؟

۱۱- اثبات کنید که اگر یک مخروط با زاویه نیم راس β را با یک صفحه قطع کنیم حاصل در شرایطی خاص یک بیضی خواهد بود. این شرایط خاص چیست؟ رابطه خروج از مرکز با زاویه بین صفحه و محور مخروط(α) و زاویه نیم راس مخروط (β) را بیابید

۱۲- از یک بیضی که کانون آن روی مبدا قرار دارد و حضیضش روی نیمه مثبت محور X قرار دارد تنها دو نقطه A(1,1) و B(-3,2) را داریم. نیم قطر بزرگ و خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

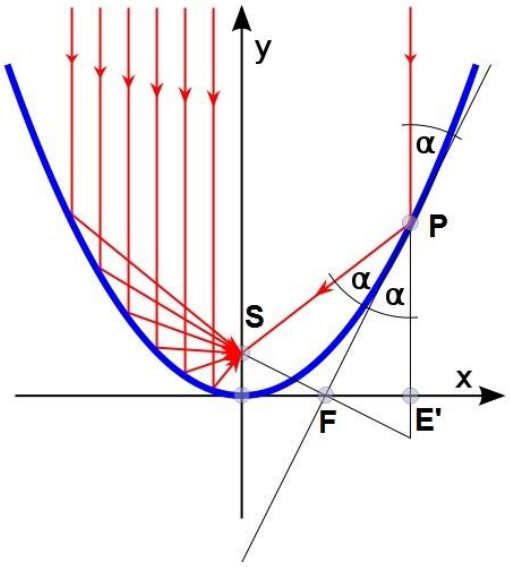
۱۳- از یک بیضی که کانون آن روی مبدا قرار دارد تنها ۳ نقطه A(2,1) و B(-1,0) و C(0,-2) را داریم نیم قطر بزرگ، خروج از مرکز و زاویه قطر بزرگ با محور X چقدر است

۱۴- از یک بیضی که مرکز آن روی مبدا مختصات قرار دارد تنها ۳ نقطه A(1,2) و B(3,-1) و C(-2,-2) را داریم نیم قطر بزرگ ، خروج از مرکز و زاویه قطر بزرگ با محور X چقدر است؟

سهمی

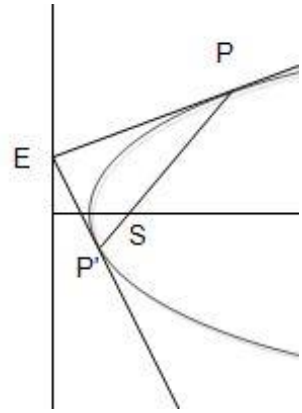
۱۵- نشان دهید که فاصله نقطه ای روی سهمی که آنومالی حقیقی آن ۹۰ درجه است تا کانون (نیم وتر قائم) دو برابر فاصله حضیض تا کانون است.

۱۶- نشان دهید اگر یک آینه سهموی داشته باشیم و پرتویی موازی محور اصلی سهمی (عمود بر خط هادی) به آینه بتابانیم، بازتاب این پرتو از کانون سهمی می گذرد (این معادل این است که نشان دهید اگر از هر نقطه دلخواه P به کانون S وصل کنید و همچنین از P به خط هادی عمود کنید و اسم پای عمود را E بگذارید، مماس بر سهمی در نقطه P نیمساز زاویه SPE خواهد بود.)

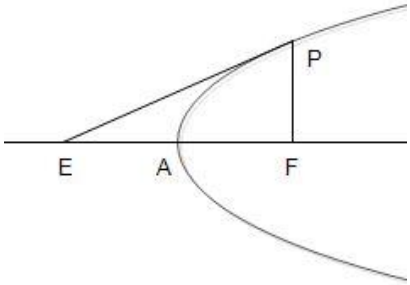


۱۷- نشان دهید که در شکل فوق زاویه SFP قائمه است.

۱۸- اگر P و P′ دو نقطه از سهمی باشند به نحوی که P و کانون و P′ روی یک خط قرار داشته باشند نشان دهید که اگر مماس های سهمی در نقاط P و P′ را رسم کنیم روی خط هادی در نقطه E به هم می رسند و زاویه PEP′ قائمه است.

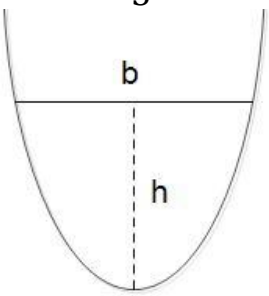


۱۹- اگر محلی که مماس بر سهمی در نقطه P محور تقارن سهمی را قطع می کند E بنامیم و از P بر محور تقارن سهمی عمود کنیم و پای عمود را F بنامیم نشان دهید که AF=AE (A راس سهمی است)



۲۰- نشان دهید که مساحت محصور بین یک خط موازی خط هادی و سهمی از رابطه زیر بدست می آید:

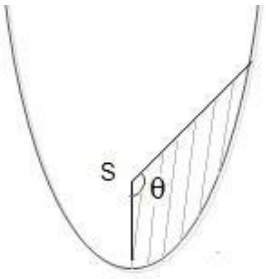
$$A = \frac{2}{3}bh$$



۲۱- نشان دهید مساحت یک تکه از سهمی که بین راستای حضیض و راستای با آنومالی حقیقی θ قرار دارد از رابطه زیر بدست می آید:

$$A = p^2\left[tg\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{3}tg^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

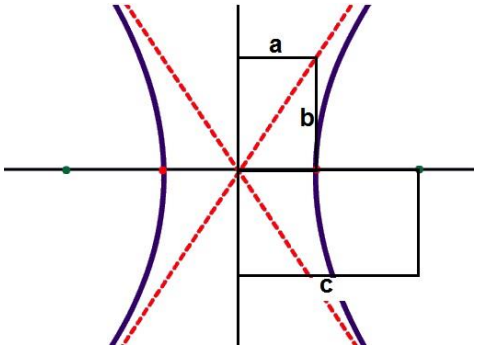
که p فاصله کانون تا حضیض سهمی است.



هذلولی

۲۲- نشان دهید که مجموعه نقاطی که نسبت فاصله شان از یک نقطه (کانون) به فاصله شان از یک خط (خط هادی) یک عدد مثبت (α) بزرگتر از ۱ باشد هذلولی است. نشان دهید خروج از مرکز هذلولی با α برابر است .

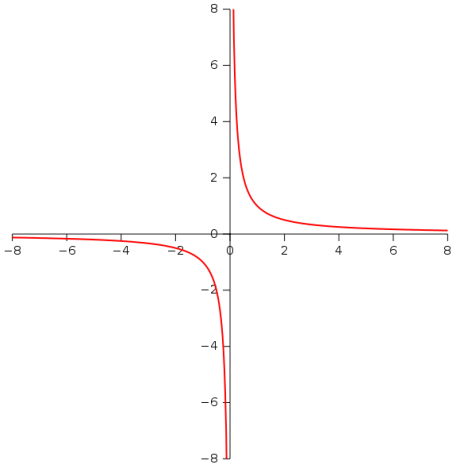
۲۳- در یک هذلولی a و b و c به صورت زیر تعریف می شوند(خطوط متقاطع نشان داده شده روی شکل مجانب های هذلولی هستند یعنی در فواصل خیلی دور، هذلولی خیلی به این خط ها نزدیک می شود)



اثبات کنید که :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

۲۴- نشان دهید که معادله $y = \frac{1}{x}$ یک هذلولی را مشخص می کند. خروج از مرکز این هذلولی چقدر است؟



۲۵- برای یک هذلولی با خروج از مرکز e بیشترین آنومالی حقیقی یک نقطه روی هذلولی چقدر است؟

۲۶- چرا اگر در تهران یک شاخص روی زمین قرار دهیم مسیر حرکت سر سایه شاخص یک هذلولی خواهد بود (راهنمایی: هذلولی را هم مانند بیضی می توان از تقاطع یک صفحه و یک مخروط تولید کرد. منتها برای اینکه شکل حاصل هذلولی شود باید شرایطی خاص برقرار باشد)

بخش دوّم

نیروی مرکزی

نیروی مرکزی

۱- نشان دهید مسیر حرکت یک جسم با جرم m تحت نیروی فنر $\vec{F} = -k\vec{r}$ بیضی با مرکز مبدا نیرو خواهد بود. می توانید شرایط اولیه را به این صورت بگیرید که جسم در فاصله r_0 از مبدا قرار دارد و سرعتی به اندازه v_0 در راستای عمود بر r_0 دارد. a و b بیضی را بر حسب ثوابت مساله بیابید.

۲- جسمی تحت تاثیر نیرویی با رابطه $\vec{F} = -kr^n\hat{r}$ در مداری دایره ای حرکت می کند:

الف) n چقدر باشد که دوره تناوب جسم به فاصله اش از مبدا بستگی نداشته باشد؟

ب) n چقدر باشد که سرعت جسم به فاصله اش از مبدا بستگی نداشته باشد؟

ج)به ازای چه n هایی دوره تناوب جسم با افزایش فاصله اش از مبدا زیاد می شود؟

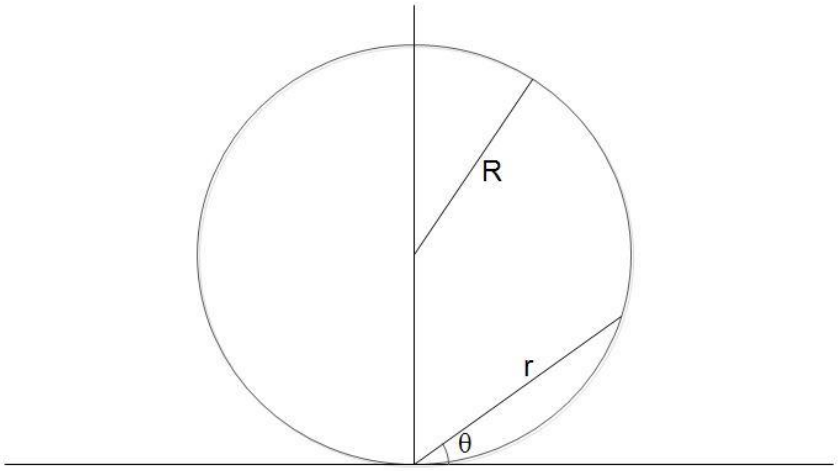
۳- جسمی با سرعت ثابت روی مسیری بیضوی حرکت می کند. توضیح دهید که چرا چنین حرکتی تحت تاثیر نیروی مرکزی امکان پذیر نیست.

۴- در این سوال می خواهیم اثبات کنیم که اگر جسمی با جرم m تحت تاثیر نیروی مرکزی $F = -\frac{m.k}{r^5}\hat{r}$ حرکت کند یک مسیر ممکن برای آن دایره ای است که از مبدا نیرو می گذرد.

الف) معادلات نیوتن را برای این مساله در راستاهای شعاعی و زاویه ای بنویسید و با مرتب کردن معادلات و تعریف $u \equiv \frac{1}{r}$ و $l = |\vec{r} \times \vec{v}|$ نشان دهید:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u - \frac{k}{l^2}u^3 = 0$$

ب) معادله فاصله از مبدا بر حسب زاویه($r(\theta)$) را برای دایره ای به شعاع R که از مبدا می‌گذرد و بر محور افقی مماس است بدست آورید.(شکل زیر)



ج) نشان دهید رابطه ای که در قسمت ب بدست آورده اید در معادله قسمت الف صدق می کند و رابطه شعاع مدار دایره ای را با سایر ثوابت مساله بدست آورید

د) رابطه ای برای زمان (t) بر حسب فاصله از مبدا (r) بیابید رابطه شما باید برحسب R و k باشد. زمان t=0 لحظه عبور جسم از مبدا است. (راهنمایی: نیازی به انتگرال گرفتن نیست)

ه) سرعت شعاعی را در لحظه عبور از مبدا بیابید. آیا بدون حل کردن هم می توانستید این مقدار را بدست بیاورید؟

۵- ذره ای با جرم واحد در امتداد خط راستی از بینهایت حرکت می کند به طوری که اگر این خط راست امتداد یابد از فاصله $b\sqrt{2}$ نسبت به نقطه P می گذرد . اگر از طرف نقطه P نیروی جاذبه ای با رابطه $\frac{k}{r^5}$ به ذره وارد شود و سرعت اولیه ذره $\sqrt{\frac{k}{2b^4}}$ است. نشان دهید که مسیر ذره با معادله زیر داده می شود:

$$r = b\coth\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)$$

تابع $coth(x)$ به صورت $\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{1}{\tanh(x)}$ تعریف می شود که $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ و $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ می توانید روابط زیر را اثبات و استفاده کنید:

$$cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$$

$$\frac{d\cosh(x)}{dx} = \sinh(x)$$

$$\frac{d\sinh(x)}{dx} = \cosh(x)$$

$$\frac{d\,tanh(x)}{dx} = \frac{1}{cosh^2(x)}$$

سعی کنید شکل $r(\theta)$ را در دستگاه قطبی رسم کنید

۶- نمودار پتانسیل موثر را برای نیروی $F = -\frac{k}{r^5}\hat{r}$ رسم کنید و مسایل ۴ و ۵ را روی آن توضیح دهید.

۷- جسمی را در نظر بگیرید که تحت تاثیر نیروی $\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\hat{r}$ حرکت می کند که k یک ثابت مثبت است. پتانسیل موثر را برای این جسم بنویسید و شعاع مدار دایره ای را بیابید. آیا جسم نمی تواند در مدار دایره ای حرکت کند؟

۸- جسمی تحت نیروی $\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\hat{r}$ در مداری دایره ای در حال گردش است. نشان دهید اگر ناگهان یک سرعت شعاعی به جسم داده شود جسم با سرعت شعاعی ثابت شروع به دور شدن یا نزدیک شدن می کند.

۹- جسمی تحت تاثیر نیرویی با رابطه $F = -\frac{k}{r^2}\exp(-\frac{r}{a})\hat{r}$ در مداری دایره ای با شعاع ρ در حال حرکت است.(k و a ثوابتی مثبتند و $\rho \ll a$) کمی آن را از مدار دایره ای مختل می کنیم. نشان دهید که در هر بار گردش مدار آن به اندازه $\frac{\rho\pi}{a}$ میچرخد.

۱۰- جسمی تحت تاثیر نیرویی با رابطه $\vec{F} = -\frac{k}{r^{2+\epsilon}}\hat{r}$ در حال گردش در مدار دایره ای است (ϵ ثابتی بسیار کوچکتر از ۱ است مثلا ϵ=0.001) اگر مدار دایره ای مختل شود جسم در هر بار گردش چه زاویه ای جابجا می شود؟

۱۱- جسمی به جرم m تحت تاثیر پتانسیلی با رابطه $V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}$ در حال گردش در مدار دایره ای با دوره تناوب τ است. اگر h یک ثابت مثبت با مقدار کوچک باشد نشان دهید سرعت زاویه ای پیش روی حضیض مدار مختل شده از رابطه زیر بدست می آید:

$$\Omega = \frac{2\pi h}{ml^2\tau}$$

از این مدل برای بررسی جابجا شدن حضیض عطارد استفاده می شود. اگر مقدار جابجا شدن حضیض در یک قرن ۴۰ ثانیه قوسی باش مقدار $\frac{h}{ka}$ برای عطارد چقدر است؟(دوره تناوب عطارد ۰,۲۴ سال و خروج از مرکز مدار عطارد ۰,۲۰۶ است و a نیم قطر بزرگ مدار عطارد می باشد)

نیروی عکس مجذوری

۱۲- یک جسم در فاصله ۱ واحد نجومی از خورشید با سرعت صفر نسبت به خورشید رها می شود (جرم جسم در مقایسه با جرم خورشید قابل صرفنظر است) چند روز طول می کشد تا جسم به خورشید برسد؟

۱۳- دو جسم با جرم های برابر تحت تاثیر نیروی جاذبه عکس مجذوری در مدار های دایره ای با دوره تناوب T به دور یکدیگر می گردند. اگر ناگهان دو جسم ساکن شوند چقدر طول می کشد تا به هم برسند؟

۱۴- نشان دهید که اگر درون یک ابر کروی با چگالی یکنواخت قرار داشته باشیم نیروی گرانش به صورت $\vec{F} = -k\vec{r}$ می باشد.

۱۵- نشان دهید پتانسیل گرانش $-\frac{GMm}{r}$ زمین در نزدیکی سطح زمین با رابطه $V_0 + mgh$ قابل تقریب است که h ارتفاع از سطح زمین و $g = \frac{GM}{{R_e}^2}$ است. توضیح دهید که اهمیت مقدار V_0 چیست.

۱۶- دو جسم با جرم یکسان در حال گردش به دور خورشید با تکانه زاویه ای برابر هستند. جسم ۱ در مداری دایروی و جسم ۲ در مدار سهموی در حال گردشند. نشان دهید که کمترین فاصله جسم ۲ از خورشید نصف شعاع مدار جسم ۱ است

۱۷- جسم۱ در حال حرکت دایروی با شعاع مداری r به دور خورشید است جسم ۲ در حال حرکت در مداری سهمی به دور خورشید است. نشان دهید هنگامی که جسم ۲ به فاصله r از خورشید می رسد سرعتش $\sqrt{2}$ برابر سرعت جسم ۱ است. این موضوع را با توجه به اندازه سرعت فرار توجیه کنید. (توجه کنید در این مساله فاصله حضیض مدار جسم ۲ اهمیتی ندارد.چرا؟)

۱۸- نشان دهید که تحت تاثیر نیروی دافعه عکس مجذوری مدار ها به شکل هذلولی در می آیند. روابط انرژی مدار و تکانه زاویه ای مدار بر حسب a و e بدست آورید

بخش سوّم

دستگاه نالخت

دستگاه نالخت

۱- پاندولی از سقف یک واگن قطار آویزان است. قطار طی ۴ ثانیه با شتاب ثابت از حالت سکون به سرعت ۲۰ متر بر ثانیه می رسد.

الف) بدون استفاده از نیروی مجازی و با دستگاه مختصات لخت زاویه پاندول با سقف واگن را محاسبه کنید

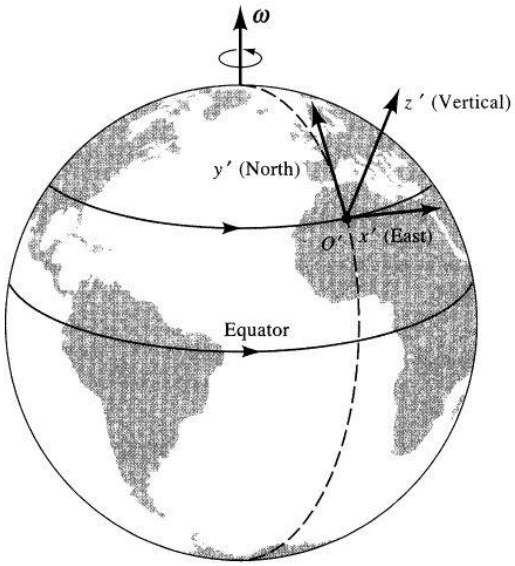
ب) با استفاده از دستگاه غیر لخت و نیروی مجازی زاویه پاندول با سقف واگن را محاسبه کنید

۲- یک لغزنده روی یک میله که آزادانه حول یک انتهای خود با سرعت زاویه ای ثابت $\vec{\omega}$ می چرخد حرکت می کند در لحظه $t = 0$ این لغزنده در فاصله r_0 از انتهای لولا شده میله رها می شود.در این مساله گرانش را به هیچ صورتی نداریم

الف) بدون استفاده از نیروی مجازی و با مکانیک نیوتونی رابطه ای برای فاصله لغزنده از لولا بر حسب زمان بیابید

ب) با استفاده از دستگاه چرخان و نیروی مجازی رابطه ای برای فاصله لغزنده از لولا بر حسب زمان بیابید

۳- با استفاده از دستگاه چرخان محاسبه کنید اگر ناظری در عرض جغرافیایی φ یک جسم را از مختصات (0,0,h) رها کند مختصات محل برخورد آن با زمین (z=0) چقدر است. محور z را در امتداد سمت الراس ناظر، محور x را در امتداد شرق از دید ناظر و محور y را در امتداد شمال از دید ناظر بگیرید. می توانید از تقریب های لازم استفاده کنید



۴- ناظری در عرض جغرافیایی 30° در حال تماشای ستاره ای با سمت $120^\circ E$ و ارتفاع 25° می باشد نرخ تغییرات سمت و ارتفاع این ستاره در این لحظه چقدر است؟ می توانید از دستگاه مختصات سوال ۳ استفاده کنید (واضح است که از روش های مربوط به نجوم کروی نباید استفاده کنید)

۵- در دستگاه محلی یک ناظر (همان دستگاهی که در سوال ۳ آمده است) در عرض جغرافیایی 50° یک جسم در مختصات $\vec{r} = 1400\hat{\imath} + 1000\hat{\jmath} + 2000\hat{k}$ متر قرار دارد و با سرعتی برابر با $\vec{v} = -100\hat{\imath} - 100\hat{\jmath} + 30\hat{k}$ متر بر ثانیه در حال حرکت است. اگر تنهای نیرویی که روی جسم اثر می گذارد گرانش زمین باشد.

الف) شتاب این جسم در دستگاه محلی ناظر را حساب کنید

ب) سمت و ارتفاع این جسم و مشتقات اول و دوم آنها نسبت به زمان را محاسبه کنید.

۶- با استفاده از دستگاه مختصات چرخان و نیرو های مجازی توضیح دهید که اگر در یک رستوران گردان سعی کنیم به سمت خارج از مرکز دوران بدویم چه اتفاقی برای ما می افتد؟

۷- جهت چرخش یک گردباد در نیمکره شمالی و نیمکره جنوبی زمین را تعیین کنید. می توانید از دستگاه مختصات سوال ۳ استفاده کنید

بخش چهارم

مسئله‌ی ۲ جسم (۱)

فصل ۲ تا انتهای بخش ۷

*حتما سوالات خود کتاب را حل کنید

۱- موشکی از نقطه ای روی استوا با سرعت $5\ km/s$ با زاویه $30°$ نسبت به افق پرتاب می شود.
الف) بیشترین ارتفاع موشک از سطح زمین را بیابید
ب) این موشک چند کیلومتر آن طرف تر به زمین برخورد می کند؟

۲- (در این سوال مدار زمین حول خورشید را دایره ای با شعاع یک واحد نجومی در نظر بگیرید) جسمی در حال گردش به دور خورشید است. هنگامی که این جسم به فاصله یک واحد نجومی از خورشید می رسد زمینی ها متوجه می شوند که این جسم درفاصله یک واحد نجومی از زمین قرار دارد(جسم در محلی قرار دارد که زمین حدودا تا ۶۰ روز دیگر به آنجا می رسد !!!) و با استفاده از اطلاعات طیف سنجی و اندازه گیری قرمز گرایی این جسم سرعت نسبی نزدیک شدن آن را به زمین $40\ km/s$ اندازه گرفتند و همان زمان با مشاهده جابجا نشدن این جسم در زمینه آسمان برای مدتی کوتاه متوجه شدند که نسبت به زمین سرعت مماسی ندارد.
الف) نیم قطر اطول، خروج از مرکز و دوره تناوب جسم دور خورشید را بدست آورید.
ب) آیا خطری زمین را تهدید می کند؟
ج) بیشترین فاصله جسم از خورشید، بیشترین سرعت جسم در مدارش و بیشترین میزان زاویه مسیر پرواز جسم را بدست بیاورید.

۳- ماهواره ای در مداری به دور زمین در حال گردش است. دستگاه مختصاتی داریم که مبدا آن روی مرکز زمین است و محور z آن در راستای قطب می باشد و محور x آن در راستای نقطه اعتدال بهاری است.
الف) آیا این دستگاه مختصات لخت است؟(هر جوابی که به این سوال می دهید بخش های بعد را با فرض لخت بودن دستگاه حل کنید)
موقعیت و سرعت ماهواره در این دستگاه از این قرارند:

$$\vec{r} = 12000\hat{\imath} + 15000\hat{\jmath} - 10000\hat{k} \quad (km)$$
$$\vec{v} = -2000\hat{\imath} + 1000\hat{\jmath} + 2500\hat{k} \quad (m/s)$$

ب) بردار یکه عمود بر صفحه حرکت ماهواره را بیابید. زاویه صفحه حرکت ماهواره را با استوا چقدر است؟

ج) بردار خروج از مرکز را بیابید و بوسیله آن مقدار خروج از مرکز مدار را تعیین کنید و بردار یکه ای در راستای حضیض بیابید

د) نیم قطر بزرگ مدار را تعیین کنید

می خواهیم هنگامی که جسم به اندازه ۳۰ درجه در مدارش پیش رفت (آنومالی حقیقی آن به اندازه ۳۰ درجه افزایش یافت) بردار مکان و بردار سرعت آن را بیابیم

ه) آنومالی حقیقی این جسم قبل از افزایش چقدر است ؟

و) پس از افزایش آنومالی فاصله ماهواره از مرکز زمین و اندازه سرعت آن چقدر است؟

ز) بردار مکان جدید سه مولفه دارد می توانید آن را به صورت $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ بنویسید . برای تعیین سه مولفه آن نیاز به سه معادله داریم. این سه معادله را بنویسید و حل کنید و بردار مکان جدید را بیابید

ح) بردار سرعت جدید سه مولفه دارد می توانید آن را به صورت $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$ بنویسید . برای تعیین سه مولفه آن نیاز به سه معادله داریم. این سه معادله را بنویسید و حل کنید و بردار سرعت جدید را بیابید

۴- دو جسم ۱ و۲ با جرم های برابر $m = \frac{72}{G}kg \approx 1.08 \times 10^{12}kg$ در حال حرکت در فضای تهی تحت تاثیر گرانش یکدیگر می باشند.G برابر با مقدار ثابت جهانی گرانش است. سرعت و مختصات اولیه این دو جسم عبارتند از: (تمامی واحد ها SI می باشد)

$$\overrightarrow{r_1} = 2\hat{\jmath} \quad , \quad \overrightarrow{r_2} = -2\hat{\jmath}$$
$$\overrightarrow{v_1} = 9\hat{\imath} \quad , \quad \overrightarrow{v_2} = 3\hat{\imath}$$

الف) توضیح دهید که چرا این دو جسم همواره در صفحه x-y باقی می مانند

ب)آیا دو جسم در مدار بسته (دایره یا بیضی) حرکت خواهند کرد؟

ج) پس از گذشت زمان ۱۰ ثانیه بردار های مکان و سرعت این دو جسم را بیابید

۵- دو جسم نقطه ای با جرم های $m_1 = 2 \times 10^{11} kg$ و $m_2 = 4 \times 10^{11} kg$ در حال حرکت در فضای تهی تحت تاثیر گرانش یکدیگر می باشند. در یک دستگاه مختصات لخت در یک لحظه بردار های مکان و سرعت این دو جرم برابرند با: (تمامی واحد ها SI می باشد)

$$\overrightarrow{r_1} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2\hat{k} \quad , \quad \overrightarrow{r_2} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - \hat{k}$$
$$\overrightarrow{v_1} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k} \quad , \quad \overrightarrow{v_2} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$$

الف) آیا می توان در همین دستگاه مختصات صفحه ای را مشخص کرد که این دو جسم در تمام زمان ها روی آن صفحه باشند؟ اگر بله معادله آن صفحه را بنویسید و اگر خیر دستگاهی را معرفی کنید که بتوانیم در آن چنین کاری را انجام دهیم و در آن دستگاه معادله صفحه را بنویسید

ب) اگر برداری که از جسم ۱ به ۲ وصل میشود را $\vec{r}$ بنامیم هنگامی که طول این بردار مینیمم است آن را بیابید. در آن لحظه فاصله هر کدام از دو جسم از مرکز جرم این مجموعه را بیابید.

ج)خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ مدار هرکدام از این دو جسم را بدست آورید.

د) هنگامی که این دو جسم در بیشترین فاصله از یکدیگر قرار دارند بردار های سرعت هرکدام را بیابید

۶- ماهواره ای با خروج از مرکز ۰٫۳ و نیم قطر اطول مدار $3R_e$ در مداری بیضوی و استوایی به طور ساعتگرد دور زمین در حال گردش است. از گردش زمین به دور خود صرفنظر می کنیم. حضیض مدار ماهواره در سمت الراس ناظری در طول جغرافیایی $70°E$ قرار دارد

الف)بیشترین ارتفاع ماهواره از دید تمام ناظرهای در عرض جغرافیایی $30°$ چقدر است؟

ب) هنگام طلوع ماهواره از دید ناظری در عرض جغرافیایی $30°$ و طول جغرافیایی $70°E$ سمت ماهواره چقدر است؟

ج) هنگام طلوع ماهواره از دید ناظری در عرض جغرافیایی $30°$ و طول جغرافیایی $70°E$ آهنگ تغییرات سمت و ارتفاع ماهواره چقدر است؟

د) بیشترین ارتفاع ماهواره از دید ناظری در عرض جغرافیایی $30°$ و طول جغرافیایی $120°E$ چقدر است؟

ه) هنگام طلوع ماهواره از دید ناظری در عرض جغرافیایی $30°$ و طول جغرافیایی $120°E$ سمت ماهواره چقدر است؟

و) هنگام طلوع ماهواره از دید ناظری در عرض جغرافیایی $30°$ و طول جغرافیایی $120°E$ آهنگ تغییرات سمت و ارتفاع ماهواره چقدر است؟

بخش پنجم

مسئله‌ی ۲ جسم (۲)

فصل ۲، بخش ۸ تا آخر

*حتما مسائل کتاب را حل کنید

۱- دو جسم A وB با جرم های به ترتیب ۱۰۰۰kg و ۳۰۰۰kg در حال حرکت به دور زمین هستند. در یک لحظه جسم A در نقطه ای با فاصله ۱۰۰۰۰ کیلومتر از سطح زمین قرار دارد و با سرعت ۱۰km/s با زاویه ۴۰° نسبت به راستای شعاعی در حال دور شدن از زمین است. هنگامی که این جسم به فاصله ۱۳۰۰۰ کیلومتر از زمین می رسد با جسم B که در حضیض مدار سهمی خود قرار دارد برخورد می کند و این دو جسم تبدیل به یک جسم می شوند. اگر مدار B و A هم صفحه باشد و جهت چرخششان برعکس یکدیگر باشد، نیم قطر اطول و خروج از مرکز جسم حاصل را بیابید.

۲- جسمی در حال گردش به دور زمین می باشد در دستگاه مختصاتی که مبدا آن مرکز زمین است و محور z آن به سمت قطب شمال و محور x آن در راستای اعتدال بهاری است مکان و سرعت این جسم عبارتند از:

$$\vec{r} = 16000\hat{\imath} + 12000\hat{\jmath} + 5000\hat{k} \quad (km)$$
$$\vec{v} = -2500\hat{\imath} + 7000\hat{\jmath} + 1000\hat{k} \quad (m/s)$$

الف) زاویه صفحه مدار با صفحه استوا چقدر است؟

ب) نیم قطر بزرگ، خروج از مرکز و آنومالی حقیقی جسم در مدارش را بیابید

ج) هنگامی که جسم به فاصله ۴۰۰۰۰ کیلومتری از مرکز زمین می رسد بردار های مکان و سرعت جسم را بیابید

۳- دو جسم با جرم های $m = \frac{10}{G} kg$ داریم. جسم ۱ در مبدا دستگاه مختصات قرار دارد جسم ۲ در راستای خط $y = 2\ meter$ از $x \to -\infty$ با سرعت اولیه v_0 به سمت راست حرکت می کند.

الف) استدلال کنید که چرا مدار این دو جسم به دور یکدیگر نمی تواند بیضی باشد.

ب) در زمان های خیلی بزرگ $(t \to +\infty)$ بردار سرعت جسم های ۱ و ۲ را بیابید.

۴- نمودار v_q بر حسب v_p را برای بیضی و سهمی و هذلولی بکشید (منظور از v_q و v_p مولفه سرعت جسم در مدار در راستای $\hat{q}$ و $\hat{p}$ در دستگاه perifocal است) و نشان دهید که حاصل یک دایره است.

۵- فرض کنید یک n ضلعی منتظم داریم که درون یک دایره به شعاع R محاط شده و n جرم نقطه ای با جرم $\frac{M}{n}$ روی راسهای این n ضلعی بگذاریم. می خواهیم به هرکدام این جرم ها سرعتی برابر با v_∞ در جهت شعاعی بدهیم به نحوی که این مجموعه کاملا از هم بپاشد
الف) کمترین مقدار v_∞ را بیابید (جواب قاعدتا باید برحسب M و n و R باشد و میتوانید آن را به صورت یک سری بنویسید. حد این سری وقتی n به بینهایت میل کند چقدر است؟)
ب) آیا اگر سرعت جرم ها همان مقدار قسمت الف را داشته باشد ولی در جهت شعاعی نباشد و در جهاتی دلخواه باشد این سیستم از هم می پاشد؟

۶- جسمی در مداری سهموی با فاصله حضیض $2R_e$ به دور زمین در حال گردش است. حضیض آن در سمت الراس نقطه ای با عرض جغرافیایی 20° و طول جغرافیایی $40^\circ E$ قرار دارد. از دید نقطه ای روی استوا با طول جغرافیایی $40^\circ E$ بیشترین ارتفاع جسم چقدر است و سمت هنگام طلوع ماهواره چقدر است و آهنگ تغییرات سمت و ارتفاع جسم هنگام طلوع چقدر است (از چرخش زمین صرفنظر کنید

۷- دو جسم A وB با جرم های به ترتیب ۱۰۰۰kg و ۳۰۰۰kg در حال حرکت به دور زمین هستند. در یک لحظه جسم A در نقطه ای با فاصله ۱۰۰۰۰ کیلومتر از سطح زمین قرار دارد و با سرعت ۱۰km/s با زاویه ۴۰° نسبت به راستای شعاعی در حال دور شدن از زمین است. هنگامی که این جسم به فاصله ۱۳۰۰۰ کیلومتر از زمین می رسد با جسم B که در حضیض مدار سهمی خود قرار دارد برخورد می کند و این دو جسم تبدیل به یک جسم می شوند. آیا امکان دارد جرم حاصل به زمین برخورد کند؟

۸- اگر بخواهیم محل تعادل تحت تاثیر دو جرم ۱ و ۲ که در مدار های دایره ای به دور هم می گردند را بیابیم به ۵ نقطه لاگرانژ می رسیم که مختصات آنها را می توانید در بخش ۱۲ فصل ۲ کتاب بر حسب جرم های ۱ و ۲ بیابید. اگر جرم جسم ۲ به صفر میل کند مختصات نقاط تعادل را بیابید و حاصل را به صورت شهودی توجیه کنید. در حدی که $m_2 = 0$ آیا هنوز فقط پنج نقطه تعادل داریم؟

بخش ششم

زمان در مدار

زمان در مدار

۱- جسمی را از نقطه ای با طول و عرض جغرافیایی ۴۰°E و ۳۰° به سوی نقطه ای در آسمان با سمت و ارتفاع ۱۰۰°E و ۳۰° با سرعت ۵km/s پرتاب می کنیم (از چرخش زمین صرفنظر کنید). جسم چه مدت بعد و در نقطه ای با چه مختصاتی به زمین برخورد می کند؟

۲- ماهواره ای در مداری به دور زمین در حال حرکت است. در یک لحظه بردار های سرعت و مکان این ماهواره در دستگاهی که مبدا آن مرکز زمین است و محور z آن به سمت قطب شمال و محور x به سمت نقطه اعتدال بهاری به صورت زیر است.

$$\vec{r} = 12000\hat{\imath} + 15000\hat{\jmath} - 10000\hat{k} \quad (km)$$
$$\vec{v} = -2000\hat{\imath} + 1000\hat{\jmath} + 2500\hat{k} \quad \left(\frac{m}{s}\right)$$

پس از گذشت زمان ۱۰۰ دقیقه بردار های مکان و سرعت را بیابید.

۳- دو جسم در مدار هایی سهموی و استوایی در جهت خلاف یکدیگر به دور زمین در حال گردشند. فاصله حضیض مدار جسم های ۱ و ۲ به ترتیب عبارتند از $3R_e$ و $5R_e$ هنگامی که جسم ۲ در حضیض مدار خود قرار دارد با جسم ۱ که در حال دور شدن از زمین می باشد برخورد می کند.(برخورد را ناکشسان در نظر بگیرید)

الف) هنگامی که جسم ۱ در حضیض مدار خود بوده فاصله جسم ۲ از سطح زمین چقدر بوده است؟

ب) یک ساعت پس از برخورد فاصله جسم حاصل از زمین چقدر است؟

۴- جسمی را با سرعت ۳۰km/s با زاویه ۵۰° با افق از روی زمین پرتاب می کنیم (از چرخش زمین صرفنظر کنید. پس از دو ساعت ارتفاع جسم چقدر است؟ پس از چه مدت زمانی جسم به فاصله ۱۰۰۰۰ کیلومتر از سطح زمین می رسد؟

۵- دو جسم با جرم های برابر $m = \frac{10}{G}kg$ را با شرایط اولیه زیر داریم. در چه زمانی و در چه مختصاتی دو جسم با هم برخورد می کنند؟

$$\overrightarrow{r_1} = 2\hat{\jmath} \quad , \quad \overrightarrow{r_2} = -2\hat{\jmath}$$
$$\overrightarrow{v_1} = 5\hat{\imath} \quad , \quad \overrightarrow{v_2} = 5\hat{\imath}$$